

HISTOIRE DU HASARD ET DE LA SIMULATION

Arthur Charpentier

Professeur, Université du Québec à Montréal

Entendre « il y a 10 % de chance de pluie aujourd'hui » ou « le test médical a une valeur prédictive positive de 75 % » montre que les probabilités sont aujourd'hui partout (1). Une probabilité est une grandeur difficile à appréhender, mais incontournable quand on cherche à théoriser et mesurer le hasard. Et si la théorie mathématique est finalement arrivée très tard, comme le rappelle Hacking [2006], cela n'a pas empêché l'assurance de se développer assez tôt, et d'avoir les premières tables (actuarielles) de mortalité avant même que la « probabilité de décès » ou « l'espérance de vie » n'ait de fondement mathématique. Et de la même manière, de nombreuses techniques ont été inventées pour « générer du hasard », avant l'explosion des méthodes dites de Monte-Carlo, en parallèle avec le développement de l'informatique (et du fait qu'une machine pouvait générer du hasard).

Pourquoi les Grecs n'ont-ils pas inventé la théorie des probabilités ?

La question peut surprendre, mais quand on voit la connaissance des Grecs en géométrie, entre l'époque de Pythagore (550 avant notre ère) et celle d'Euclide (300 avant notre ère), on peut être surpris qu'aucune théorie du hasard n'ait été proposée. Il faut peut-être se souvenir que dans la tradition mathématique grecque, l'hypothèse doit être suffisante pour impliquer la juste déduction. L'arithmétique par exemple est une « connaissance sans action », une *γνωσις* sans *πραξις*, comme l'affirmait Platon dans *Le Politique*,

cité par Goldschmidt [2003] : « L'arithmétique, dépouillée de toute action qui se borne à fournir une connaissance [et] l'art de la charpente où la science est originellement liée aux actions ». On ne peut alors pas imaginer une théorie mathématique du hasard basée sur des lancers de dés.

Mais au-delà de cette contrainte épistémologique, si on relit les grands textes grecs, le fatalisme est très présent, tant dans la mythologie que dans la philosophie. L'oracle de Delphes, et plus généralement la divination, affirme l'existence de chaînes causales incassables, à travers lesquelles le présent prédétermine l'avenir – ce que nous appellerions un déterminisme dur –, comme en atteste le mythe d'Œdipe. Même la statistique peut faire peur. En 150 avant notre ère, Ptolémée, le grand astronome d'Alexandrie, a lutté contre les erreurs de mesure sans aucune théorie de

l'erreur, le forçant à plusieurs reprises aux compromis pour concilier ses théories avec les observations discordantes, comme le rappelle Gingerich [1997]. En allant plus loin, on pourrait presque affirmer que les mathématiciens grecs auraient considéré les probabilités comme un sophisme, σοφισμα, une tentative de produire des connaissances par ignorance. L'approche fréquentiste peut sembler objective, mais les probabilités bayésiennes sont fondamentalement subjectives, ce qui semble conforter cette approche antique. Platon pensait que les mathématiques et les idées étaient réelles, alors que le monde physique est constitué d'ombres. Le temps lui-même étant exclu de sa réalité, alors on ne peut imaginer que le hasard puisse être un objet mathématique digne d'intérêt. Les atomistes auraient pu imaginer une théorie des probabilités, mais leur programme de recherche ne l'a pas fait. Cette théorie devra attendre quelques décennies, mais cela n'empêchera pas les hommes de chercher à produire du hasard, voire d'en déduire des lois (2).

De l'importance historique des dés

Les dés se retrouvent tout au long de l'histoire de l'humanité. Un premier usage des dés a été la divination. Ils étaient utilisés lors de cérémonies religieuses, même si les premiers dés étaient souvent des os (ou osselets). Leur asymétrie naturelle pose des problèmes de crédibilité : même le croyant pieux s'interrogera sur la vraie volonté des dieux s'il tombe constamment sur la même face. L'objectivité de dés symétriques s'est vite fait sentir. Cette symétrie a permis le développement également de jeux de hasard, rendant les jeux équitables pour les différents joueurs. Plusieurs sites archéologiques en Europe ou au Proche-Orient ont mis au jour de nombreux exemples d'astragale, ce petit os situé au-dessus du talon, souvent considéré comme une forme primitive de dés. L'os des animaux à sabots (le bœuf ou la chèvre) était privilégié car il était le plus symétrique (les pieds plus développés présentent

des formes plus irrégulières). Certains d'entre eux présentaient aussi des faces travaillées, donnant une forme presque cubique. Et plusieurs avaient des faces marquées de signes. En 2700 avant notre ère, un dé à six faces, sculpté à la main, cubique avec des bords légèrement arrondis, a été découvert en Iran. Les cubes présentent l'avantage de pouvoir rouler de manière assez improbable (même si plusieurs dés présentent des irrégularités de densité).

Pendant l'Antiquité, les paris de dés étaient particulièrement répandus, comme le rappelle le premier chapitre de David [1962]. Et l'appât du gain a poussé certains joueurs à mieux comprendre comment maximiser leurs gains. La symétrie et la régularité étaient les meilleures garanties pour éviter les tricheurs et assurer une forme d'équité, de régularité, avec la possibilité d'obtenir des « lois ». Mais à l'époque romaine, la plupart des dés étaient des cubes très imparfaits, déséquilibrés. C'est à la fin du Moyen Âge (et surtout pendant la Renaissance) que la forme des dés s'est stabilisée, et que les premiers développements de la théorie des probabilités ont été une tentative pour donner des conditions d'équité aux jeux de hasard, et en grande partie aux jeux de dés. On connaît en particulier les travaux de Huygens, de Fermat ou de Galilée sur les lancers de plusieurs dés. Ce dernier a montré qu'en lançant trois dés, il y a plus de chance que la somme des faces soit égale à 10 qu'à 9. Les dés sont encore très utilisés pour introduire les calculs de probabilités à l'école.

Donjons et dragons, dés et assurance

Si les dés à six faces sont les plus connus, il est aujourd'hui possible de trouver d'autres formes (3) de dés, comme l'octaèdre – le dé dit D8 – ou le décaèdre régulier – le D10. Mais au lieu de se contenter de lancer un seul dé, les joueurs utilisent depuis longtemps l'idée qu'il est aussi possible de lancer plusieurs dés simultanément. De manière très générale, on peut ainsi lancer n dés

à k faces. La variable aléatoire correspondant à la somme des faces est alors notée nDk . On peut noter que l'espérance est $E[nDk] = n \cdot E[Dk] = n(k + 1)/2$, et que la variance est $\text{Var}[nDk] = n \cdot \text{Var}[Dk] = n(k^2 - 1)/12$. La figure 1 montre la distribution de nDk , dans le cas particulier où $n \cdot k = 100$ (correspondant au maximum que l'on peut obtenir), avec différents types de dés. Pour avoir un résultat s'interprétant comme un pourcentage, le produit de deux *D10* avait été envisagé dans un jeu de rôle ; mais la distribution était peu usuelle et très asymétrique (avec 80 % de chance d'obtenir moins de 50, par exemple).

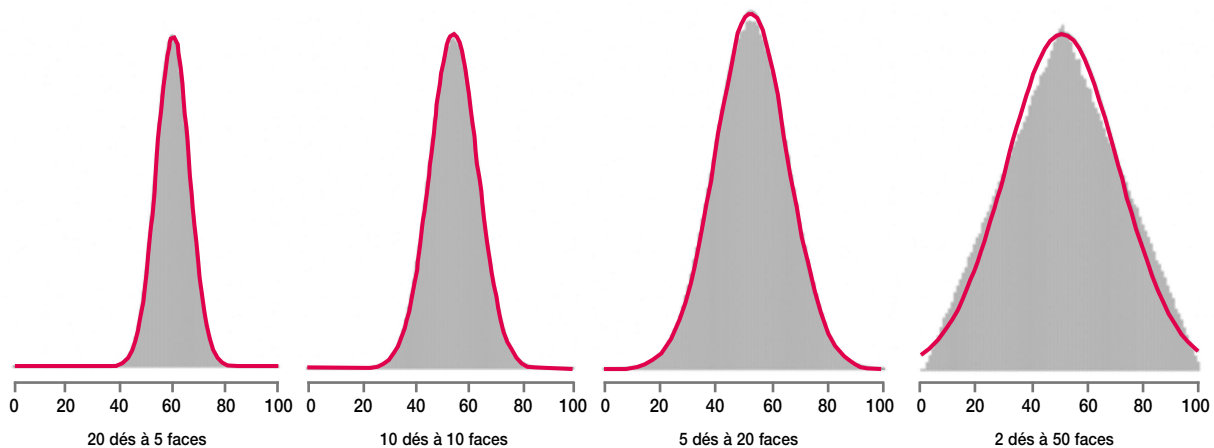
Dans les années 1970, Gary Gygax travaillait pour une société d'assurance, tout en étant un grand amateur de jeux de guerre (avec des figurines miniatures en plastique). Ces batailles moyenâgeuses étaient relativement réalistes, jusqu'à ce que Gygax introduise des elfes et des sorciers. Ce dernier trouvait son travail d'assureur très proche du jeu fantastique qu'il venait d'inventer : *Donjons et dragons*. « Si vous louchez sur une feuille de personnage, vous verrez qu'il s'agit d'une table actuarielle » notait Buchanan [2008]. « Les assureurs considèrent des événements de la vie d'une personne et construisent des statistiques pour savoir quand elle va mourir, et de quoi. Gary a dit : "Faisons cela pour un dragon. On va lancer un dé pour les probabilités" ». Dans le jeu, pour toute situation donnée, il y a α % de chance qu'un événement se produise. Par exemple, si je suis un barbare combattant

un sorcier maléfique avec une épée, il y a 30 % de chance que je le tue, 70 % que je le rate ; et si mon épée a des pouvoirs magiques, ma chance de le rater est divisée par deux. Gygax proposa d'utiliser des dés pour simuler ces événements aléatoires ; et même d'utiliser un autre dé pour modéliser la gravité des dommages causés, par exemple en tenant compte de la taille de l'épée. Les actuaires reconnaissent les modèles classiques d'assurance dommage. Comme l'attestent plusieurs brochures du jeu, en particulier Gygax [1989], dès le début Gary Gygax voulait reproduire la loi gaussienne, la fameuse « *Bell Curve* », avec le moins de dés possible. Utiliser les dés à 20 faces (alors très peu populaires et difficiles à se procurer) a été la solution la plus naturelle, et qui a probablement révolutionné les jeux de rôle. Comme le montre la troisième distribution de la figure 1, cinq lancers de tels dés donnent une loi normale (avec un degré de précision très satisfaisant), tout en donnant des calculs faciles à faire. Mais ce n'est pas la méthode retenue par les actuaires pour les générateurs de scénarios.

Générer du hasard

Générer du hasard est devenu une technique très populaire aujourd'hui pour que les chercheurs puissent traiter nombre de problèmes, allant du comportement au

Figure 1 - Distribution de nDk , n lancers de dés à k faces



Source : calculs de l'auteur.

niveau moléculaire à l'échantillonnage d'une population, ou à la résolution de certains systèmes d'équation. Les actuaires les utilisent quotidiennement pour quantifier l'incertitude. Il y a encore un siècle, les personnes qui avaient besoin de nombres aléatoires pouvaient lancer des pièces de monnaie, tiraient des boules dans des urnes agitées, ou lançaient des dés comme nous l'avons vu précédemment. Mais comme le rappelle Mlodinow [2008], lorsque les jeux de hasard ont été interdits (lors de la prohibition, dans les années 1920), il fallut trouver d'autres techniques pour générer des nombres au hasard. Une méthode retenue a été d'utiliser les chiffres publiés par le gouvernement américain, dès qu'ils concernaient de gros montants, comme le solde de trésorerie (U.S. Treasury Balance), et de retenir par exemple les trois derniers chiffres quand on voulait un nombre entre 1 et 999 : en affichant une dette de 8 995 800 515 946 \$ US on retenait 946. Si les premiers chiffres étaient (plus ou moins) prévisibles, l'intuition était qu'il n'était pas possible de prévoir les derniers ⁽⁴⁾. En 1927, le statisticien britannique Leonard Tippett a utilisé une idée similaire pour publier un livre avec 41 600 « nombres aléatoires », obtenus en prenant les chiffres du milieu de la superficie des paroisses en Angleterre (dans un format proche de celui de la figure 2).

La même année, en 1927, un statisticien soviétique, Evgueni (Eugene) Slutsky montra un résultat qui pourrait être vu comme l'inverse de celui de Tippett : dans le premier cas, on utilisait des séries économiques pour générer du hasard, et Slutsky démontra qu'on pouvait utiliser des séries aléatoires pour générer toutes sortes de séries économiques. Au

début du XX^e siècle, plusieurs chercheurs pensaient que les événements imprévisibles comme les guerres, les mauvaises récoltes ou les innovations technologiques devaient jouer un rôle dans les cycles économiques. Mais personne n'avait vraiment compris à quel point les processus aléatoires (que nous appelons aujourd'hui stochastiques) sont cruciaux pour comprendre le fonctionnement de l'économie ; jusqu'à ce qu'Eugene Slutsky publie ses travaux sur les « phénomènes cycliques » (pour reprendre le titre de son article), et montre que des manipulations très simples de séries aléatoires (en l'occurrence des nombres obtenus lors de tirages d'une loterie gouvernementale) pouvaient engendrer des modèles ondulés impossibles à distinguer des cycles économiques, ou comme le disait Slutsky, que toute série économique pouvait être vue comme un processus stochastique obtenu comme « la somme des causes aléatoires ».

Comme le note Chetverikov [1959], Slutsky écrit alors avec enthousiasme à sa femme, restée à Kiev, qu'il était « chanceux d'arriver à une conclusion assez considérable, de découvrir le secret de [...] ces mouvements ondulés observés dans les phénomènes sociaux ». Ces techniques seront largement utilisées en physique sous le nom de méthodes de Monte-Carlo quelques années plus tard, mais la reconnaissance de l'importance des travaux de Slutsky en économie devra attendre les années 1970, avec l'utilisation massive des moyennes mobiles.

Modéliser et générer du hasard a permis les grandes avancées scientifiques des dernières années, et proba-

Figure 2 - 60 nombres aléatoires, tirés uniformément entre 1 et 99 999

28 758	52 807	67 749	32 786	65 555	96 273	75 818	41 355	26 585	56 064
78 829	89 235	57 256	95 432	70 835	90 202	21 633	36 869	85 740	20 642
40 897	55 139	10 291	88 936	54 392	69 048	31 806	15 238	4 581	12 746
88 299	45 657	89 969	69 266	59 398	79 520	23 154	13 875	44 198	75 288
94 043	95 673	24 605	64 036	28 908	2 461	14 275	23 293	79 851	89 452
4 556	45 328	4 206	99 404	14 707	47 763	41 438	46 574	12 184	37 424

Source : auteur.

blement aussi des prochaines, comme l'ordinateur quantique (si on accepte de voir le principe d'indétermination comme un problème de probabilité). Pourtant les probabilités sont un concept difficile à manipuler, source de nombreux paradoxes, comme le rappelait Charpentier [2014]. Et si elles sont encore présentées sous leur version fréquentiste (basée sur la loi des grands nombres), supposant une répétition infinie d'expériences (comme les lancers de dés), comment comprendre une « probabilité prédictive » utilisée par les actuaires en tarification, d'autant plus lorsque l'assurance se prétend « individualisée » ?

Notes

1. La valeur prédictive positive est la probabilité d'avoir une maladie lorsque le test est positif.
2. Ce terme de « loi » rappelle le caractère empirique des probabilités, à savoir une stabilité observable par des expériences, comme la loi des grands nombres qui peut être rapprochée de la loi de la gravitation universelle ou de la loi de la conservation de l'énergie, contrairement à la géométrie ou à l'arithmétique.
3. On préférera, toujours pour des arguments de symétrie, les polyèdres réguliers, largement connus depuis l'époque grecque, entre Pythagore qui décrit le tétraèdre (la pyramide, 4 faces), l'hexaèdre (le cube, 6 faces) et le dodécaèdre (8 faces), et Théétète d'Athènes qui décrit les deux autres : l'octaèdre (12 faces) et l'icosaèdre (20 faces).
4. Sans entrer dans une théorie de la génération de hasard, l'idée sous-jacente fondamentale est qu'il est impossible de prévoir une valeur. On retrouve la notion très proche de « martingale », très populaire en mathématiques financières (et aussi en jeux de hasard).

Bibliographie

- BUCHANAN L., « Legacy Gary Gyax, 1938-2008 », *Inc Magazine*, juin 2008. <https://www.inc.com/magazine/20080601/legacy-gary-gyax-1938-2008.html>
- CHARPENTIER A., « Interprétation, intuition et probabilités », *Risques*, n° 99, septembre 2014.
- CHETVERIKOV N. S., *The Life and Scientific Work of Slutsky*, 1959.
- DAVID F. N., *Games, Gods, and Gambling: A History of Probability and Statistical Ideas*, Charles Griffin & Co, 1962.
- GINGERICH O., *The Eye of Heaven: Ptolemy, Copernicus, Kepler*, American Institute of Physics, 1997.
- GOLDSCHMIDT V., *Le paradigme dans la dialectique platonicienne*, coll. « Bibliothèque d'histoire de la philosophie », Vrin, 2003.
- GYGAX G., *Advanced Dungeons & Dragons, Dungeon Masters Guide*, TSR, 1989. <https://bit.ly/2O649Au>
- HACKING I., *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference*, Cambridge University Press, 2006.
- MLODINOW L., *The Drunkard's Walk: How Randomness Rules our Lives*, Vintage Books, 2008.
- SLUTSKY E., The Summation of Random Causes as the Source of Cyclical Processes. *Econometrica*, vol. 5, issue 2, 1937, pp. 105-146 (version originale en russe, 1927).
- TIPPETT L., *Random Sampling Numbers*, Cambridge University Press, 1927.