

COLLECTION « ÉCONOMIE ET STATISTIQUES AVANCÉES »

esa

esa

COLLECTION « ÉCONOMIE ET STATISTIQUES AVANCÉES »

*Cet ouvrage en deux tomes entend fournir aux étudiants, chercheurs et aux techniciens de l'assurance (qu'ils soient actuaires, économistes, économètres, ingénieurs commerciaux, mathématiciens, polytechniciens, statisticiens ou autre) les méthodes permettant de gérer les grands portefeuilles d'assurance IARD. Il aborde ainsi :*

- les principes de base de la gestion des risques,*
- les méthodes de calcul des primes, les mesures de risque et la détermination de la marge de solvabilité ainsi que du capital économique,*
- la corrélation entre risques assurés et ses conséquences,*
- l'équilibre à long terme des opérations de la compagnie,*
- la personnalisation des primes a priori et a posteriori (crédibilité et systèmes bonus-malus),*
- l'évaluation des provisions techniques,*
- la résolution de problèmes par simulation.*

*Les connaissances requises pour aborder cet ouvrage ont été réduites au strict minimum : il suffit de posséder de bonnes bases de mathématiques et une maîtrise des concepts élémentaires du calcul des probabilités.*

\*  
\* \*

**Michel DENUIT** est Membre de l'Association Royale des Actuaires Belges, docteur en sciences (orientation statistique) de l'Université libre de Bruxelles. Il est actuellement professeur à l'Institut des Sciences Actuarielles de l'Université catholique de Louvain (UCL), à l'Université de Liège, à l'ISFA de Lyon et à l'Institut l'INSEA à Rabat.

**Arthur CHARPENTIER** est Membre de la Commission Scientifique de l'Institut des Actuaires, diplômé de l'ENSAE et de l'université Paris Dauphine. Il est actuellement enseignant à l'ENSAE, à l'ENSEA d'Abidjan et à l'Université Paris Dauphine, et est également membre du jury de l'Institut des Actuaires.

Michel DENUIT  
Arthur CHARPENTIER

MATHÉMATIQUES  
DE L'ASSURANCE NON-VIE

TOME I

**Michel DENUIT**  
**Arthur CHARPENTIER**

# MATHÉMATIQUES DE L'ASSURANCE NON-VIE

**TOME I : PRINCIPES FONDAMENTAUX  
DE THÉORIE DU RISQUE**



ISBN 2-7178-4854-1  
45 €



**Economica**

# Préface

L'aversion au risque, la "risquophobie", est aujourd'hui érigée en vertu comme en témoigne les débats autour du principe de précaution. Norme abstraite au contenu mal défini, il a vocation à intégrer le préambule de notre Constitution au risque de produire des effets dont on ne mesure pas encore l'ampleur.

Dans ce contexte d'incertitude, il est particulièrement réconfortant de revenir aux sources, aux fondamentaux, c'est-à-dire aux mathématiques et de rappeler que le risque naît de l'aléa et s'appréhende grâce aux développements les plus avancés du calcul des probabilités.

C'est ce que rappelle justement l'ouvrage de Michel Denuit et Arthur Charpentier "Mathématiques de l'assurance non-vie", dont le lecteur appréciera la présentation rigoureuse, claire et pédagogique des outils modernes d'analyse de risque.

L'assureur que je suis a été particulièrement sensible à l'introduction à la théorie des copules qui permet de modéliser la dépendance entre les différents risques auxquels sont confrontés les gestionnaires au sein de nos entreprises. Car c'est une évidence, lorsque les catastrophes surviennent les sinistres ne sont pas indépendants.

Cet ouvrage constituera, j'en suis sûr, une référence incontournable pour les actuaires. Mais au-delà du secteur restreint de l'assurance, compte tenu de la place de plus en plus importante occupée par l'idée de "risque" dans nos sociétés, l'enseignement du calcul des probabilités dans nos formations supérieures d'ingénieurs, nos écoles de commerce et de gestion - et même en sciences politiques ! -, gagnerait à aborder des problèmes concrets de gestion du risque empruntée à l'actuariat. Cet ouvrage, en proposant les outils théoriques adéquats, leur en offre la possibilité.

Les futurs responsables et décideurs seraient ainsi mieux à même d'intégrer dans leur démarche le fait que le risque, bien quantifié et apprécié, constitue aussi, sinon davantage, une opportunité d'innovation, une source de création de richesse, donc de progrès pour nos sociétés.

**Claude Bébéar, 31 mars 2003.**

# Liminaires

RISQUE [risk] -1663, 1578. Italien *risco*, bas latin *risicus* ou *riscus*. — **1** . Danger éventuel plus ou moins prévisible, danger, hasard, péril. — **2** . Eventualité d'un événement futur, incertain ou d'un terme indéterminé, ne dépendant pas exclusivement de la volonté des parties et pouvant causer la perte d'un objet, ou tout autre dommage. En matière d'assurance le terme désigne souvent l'événement contre la survenance duquel on s'assure. — **3** . "Le risque est le hasard d'encourir un mal, avec espérance, si nous échappons, d'obtenir un bien" (CONDILLAC, in FOULQUIÉ, Dictionnaire langue philos.)

## Ojectifs et contexte

Cet ouvrage traite des mathématiques du risque, au sens où l'entendent Hans Bühlmann dans *Mathematical Methods in Risk Theory* (paru en 1970) ou Hans Gerber dans *An Introduction to Mathematical Risk Theory* (paru en 1979). Afin d'éviter toute confusion avec les mathématiques financières, nous l'avons intitulé "Mathématiques de l'assurance non-vie". Ces mathématiques correspondent à ce que les anglo-saxons appellent aussi mathématiques actuarielles (*actuarial mathematics*).

A partir de nos notes de cours remises en forme, nous avons souhaité proposer aux étudiants en sciences actuarielles (mais aussi, plus généralement, en mathématiques appliquées), un ouvrage présentant les outils mathématiques utilisés en assurance non-vie, sans pour autant avoir la prétention d'être un traité exhaustif des techniques actuarielles, loin s'en faut! L'ouvrage vise plutôt à fournir une méthode moderne d'analyse et de gestion des risques. Conçu comme support des cours d'assurances dommages (à l'Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique, et à l'Institut des Sciences Actuarielles de Louvain-la-Neuve), il semble tout

indiqué pour servir de base à des enseignements semblables dans d'autres institutions. Ainsi, de larges parties de cet ouvrage ont été utilisées dans le cadre d'enseignements à l'Université Paris 9 Dauphine, à l'Institut de Science Financière et d'Assurance (ISFA) de l'Université de Lyon 1, à l'Institut National d'Economie et de Statistique Appliquée (INSEA) de Rabat, à l'Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Economie Appliquée (ENSEA) d'Abidjan, à l'Université de Varsovie et à l'Université de Bucarest. En outre, l'exposé a été conçu pour permettre une lecture par des étudiants, chercheurs ou enseignants en mathématiques qui désireraient s'initier aux sciences actuarielles. L'ouvrage se veut accessible aux différents types de lecteurs. La plupart des notions techniques sont ainsi brièvement rappelées, si bien qu'un lecteur peut aborder l'ouvrage avec un minimum de connaissances en mathématiques et en théorie des probabilités.

Jules Dubourdiou notait en 1958 dans la préface de sa *Théorie Mathématique des Assurances*, que

*"l'enseignement de l'actuariat apparaît ainsi comme figé dans une terminologie, sinon dans des méthodes dépassées, et il n'est pas surprenant, dans ces conditions, que les applications aux problèmes de l'assurance apparaissent à la plupart des probabilistes comme peu instructives, et peu dignes de retenir l'attention du mathématicien"*.

Pour faire une comparaison, si les mathématiques financières ont su franchir ce cap, il faut noter que les mathématiques de l'assurance n'ont pas tellement évolué depuis cette déclaration. Pour continuer le parallèle, si les marchés financiers se sont mis à manipuler des concepts mathématiques de plus en plus évolués, les mathématiques du risque ont souvent inspiré du scepticisme au sein des compagnies d'assurance. L'assurance non-vie a souvent reposé sur du bon sens, et sur une perception quelque peu subjective du risque. Mais comme le notait Borel au sujet des compagnies d'assurance,

*"nous partons ainsi d'une base pratique assez solide pour que nous ayons dans la théorie la confiance qui est nécessaire pour ne pas avoir à tenir compte du scepticisme qui peut toujours être opposé à toute tentative d'explication rationnelle"*.

De la même façon, nous pensons que la théorie mathématique de l'assurance n'est pas seulement une application séduisante du calcul des probabilités: nous sommes persuadés qu'elle peut contribuer

à promouvoir le développement de méthodes plus rationnelles dans la gestion des risques. Et les difficultés qui vont nécessairement de pair font que l'actuaire "*doit unir à une solide formation théorique l'esprit critique et la prudence qu'exige toute activité qui ne se cantonne pas sur le plan de la spéculation pure et qui entend dominer les faits.*" C'est pour cela que nous pensons que cet ouvrage est également destiné aux professionnels du risque.

L'ouvrage traite surtout les risques de masse, c'est-à-dire la couverture d'un grand nombre de risques semblables au moyen de contrats dont les conditions sont standardisées. L'exposé se focalise donc sur de grands portefeuilles d'assurance; ceci permettra de faire appel aux résultats asymptotiques du calcul des probabilités, comme la loi des grands nombres et le théorème central-limite.

L'ouvrage se concentre sur les assurances de choses et les assurances de responsabilité. Dans le premier cas, l'assureur s'engage à indemniser l'assuré des dommages subis par ses biens (assurance incendie, vol, dommages matériels aux véhicules, ...). Dans le second cas, l'assureur s'engage à indemniser à la place de l'assuré les tiers victimes de dommages matériels ou corporels dont l'assuré est responsable (assurance de responsabilité civile automobile, familiale, ...).

*"But the age of chivalry is gone;  
that of sophisters, economists, and calculators has succeeded [...]"*

Edmond Burke, Reflections on the Revolution in France (1791).

## Tome 1 - Principes fondamentaux de théorie du risque

Le premier tome entend jeter les bases théoriques nécessaires à la compréhension et à la résolution des problèmes qui se posent en assurance non-vie. Il est consacré aux principes fondamentaux de la théorie mathématique du risque, théorie dans laquelle les sciences actuarielles sont profondément ancrées.

Le premier chapitre introduira les concepts de base de l'assurance non-vie, de manière relativement informelle. Avant d'entamer l'étude des techniques assurantielles proprement dites, il nous a en effet paru essentiel de fournir au lecteur une introduction aux

notions qui seront utilisées abondamment dans la suite de l'ouvrage. Cette introduction s'avèrera particulièrement utile aux non-actuariels, qui pourront ainsi mieux appréhender le cadre économique dans lequel se placent les développements des chapitres suivants.

Historiquement, les mathématiques actuarielles sont nées avec les tables de mortalité, et le calcul de rentes actualisées, c'est-à-dire une conception déterministe du risque. Toutefois, la plupart des éléments utilisés dans l'approche moderne des mathématiques de l'assurance reposent sur les outils développés dans la branche de théorie des probabilités: la survenance d'un sinistre est un évènement aléatoire, ainsi que, bien souvent, son coût. Comme le notait Dubourdieu,

*"il serait vain de chercher à aborder et à traiter ces problèmes [de "théorie du risque"] d'une manière tant soit peu approfondie, sans faire appel aux méthodes modernes de la théorie des probabilités".*

Le deuxième chapitre introduit la modélisation probabiliste du risque, qui sera utilisée dans toute la suite de l'ouvrage. La taille de ce chapitre peut paraître impressionnante au premier regard. Toutefois, ceci permettra aux chapitres suivant d'être considérablement allégés, puisque la plupart des résultats de théorie du risque peuvent être vus comme des applications de résultats probabilistes. Le second chapitre introduira les outils probabilistes utilisés en modélisation des risques, de façon abordable pour un public d'économistes, et intéressant, on l'espère, pour les mathématiciens. Les modèles classiques pour le nombre et le coût (individuel) des sinistres y seront présentés.

Le troisième chapitre sera entièrement consacré au concept de la prime pure: il s'agira de légitimer, sous certaines conditions, l'usage de l'espérance mathématique pour calculer le prix du risque. Le principe de mutualisation des risques repose, d'un point de vue mathématique, sur l'utilisation de la loi des grands nombres. On suppose alors généralement que les risques sont assez nombreux et assez homogènes pour être "*justifiables de la loi mathématiques des probabilités*" selon l'Encyclopedia Universalis.

*"Cela explique que certains risques catastrophiques soient actuellement inassurables. Mais le champ des risques assurables s'élargit sans cesse grâce aux études des théoriciens..."*

Nous insisterons toutefois (lourdement peut-être) sur les situations où le calcul de la prime pure au moyen de l'espérance mathématique n'est pas pertinent. Nous verrons également qu'une tarification basée uniquement sur la prime pure conduit à une ruine certaine (quel que soit le niveau des fonds propres dont la compagnie dispose).

Cette approche à l'aide de la prime pure permet d'obtenir un équilibre économique *en moyenne*. Ce qui signifie que pour des risques analogues et indépendants, et pour un portefeuille suffisamment grand, la loi des grands nombres peut s'appliquer. Le quatrième chapitre montrera comment, et pourquoi l'actuaire ne se contente pas de la prime pure mais lui ajoute un chargement de sécurité. Cette composante peut être particulièrement importante, en particulier si le risque est susceptible de subir, d'une année à l'autre des fluctuations importantes, ou si le risque est insuffisamment connu.

Dans les années 80, sur les marchés financiers, l'hypothèse de risques gaussiens s'est avérée insuffisante pour mesurer correctement les risques: comment comparer du risque de faillite à du risque de variation de taux de change, en utilisant comme seul indicateur la volatilité (l'écart-type)? La mesure de risque retenue a été la Value-at-Risk (ou VaR), correspondant à un quantile de la distribution de perte. Il s'agit alors, à probabilité donnée, du *pire* cas probable. Nous verrons dans le cinquième chapitre ce qu'est une mesure de risque, et quelles propriétés *souhaitables* elle doit vérifier. Nous évoquerons plus particulièrement deux mesures de risque utilisées en assurance non-vie: la Value-at-Risk, ainsi que la Tail VaR (espérance au-delà de la VaR). Nous présenterons également une classe relativement vaste de mesures de risque, définies à l'aide d'opérateurs de distorsion. Enfin, nous nous servirons de ces mesures de risque pour comparer les risques en présence.

Dans les contrats d'assurance-vie, historiquement centre de prédilection des actuaires, le risque était *individuel*. En assurance non-vie, sous l'impulsion de l'école scandinave (Filip Lundberg dès 1909 puis Harald Cramér en 1926), les actuaires se sont intéressés à l'approche du risque du point de vue de la compagnie d'assurance: le modèle *collectif* était né. Le sixième chapitre sera ainsi consacré au modèle collectif. Comme le notait Hans Gerber dans l'introduction de *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, l'obtention de la loi de probabilité de la charge totale des sinistres a toujours été l'objet d'un chapitre central dans les ouvrages de théorie du risque. Nous

étudierons en particulier dans cette partie les méthodes numériques permettant d'obtenir la loi de la somme cumulée de sinistre (notamment à l'aide du célèbre algorithme de Panjer).

Le septième chapitre sera centré sur l'équilibre à long terme des résultats de la compagnie, correspondant à la notion mathématique de *probabilité de ruine*. Le lien entre processus stochastiques et théorie du risque a été établi au début du vingtième siècle par Filip Lundberg et Harald Cramér. Ce problème de la ruine d'une compagnie d'assurance a toutefois été relancé en 1963, suite à l'intervention de Bruno de Finetti au colloque ASTIN à Trieste, sur "*La théorie des plus grandes valeurs et son application aux problèmes de l'assurance*". Nous mettrons l'accent dans cette partie sur les équations exactes (équations intégro-différentielles ou relations à l'aide de transformées de Laplace, par exemple), en présentant quelques cas particuliers permettant d'obtenir des formules explicites pour la probabilité de ruine (en particulier dans le cas poissonien, lorsque les coûts individuels suivent une loi exponentielle négative), mais aussi des approximations ou des majorations de la probabilité de ruine. En retenant l'approche de Seal, nous étudierons de façon générale la probabilité de ruine à horizon donné (parfois infini), en fonction du montant de réserves initiales.

Le huitième et dernier chapitre du premier tome abordera le cas des risques multiples. En effet, en gestion des risques, une des notions fondamentales est celle d'agrégation des risques: un portefeuille de compagnie d'assurance non-vie comporte ainsi des contrats automobile, habitation, incendie, etc. Par facilité, on suppose généralement tous ces risques indépendants, y compris quand une compagnie commence à proposer des contrats (dits multi-branches) couvrant l'ensemble des risques pour un même client. Comme le rappelait d'ailleurs Hans Bühlmann<sup>1</sup> en 1963,

*"the independence hypothesis is so common to be made that many authors forget to mention it"*.

Mais les tempêtes de 1999 par exemple ont montré clairement que lorsque des catastrophes surviennent, plusieurs garanties sont touchées en même temps: les risques ne sont pas indépendants. Une fois cette constatation faite, il convient de proposer des modèles permettant de prendre en compte cette non-indépendance

1. On notera d'ailleurs l'apport de Hans Bühlmann sur ce sujet (en particulier sur l'étude des variables échangeables) dans *Austauschbare stochastische Variablen und ihre Grenzwertsätze* (1960).

entre les risques. Après des rappels sur les vecteurs aléatoires, nous évoquerons la notion de dépendance positive, de relation d'ordre entre vecteurs aléatoires, ainsi que la notion de mesure de dépendance. La section suivante abordera alors la notion fondamentale de fonction copule, permettant de séparer un vecteur de risques, en un comportement marginal d'une part, et une structure de dépendance d'autre part. Mais si cette notion est particulièrement utile pour les lois continues, nous verrons que son intérêt est très limité pour les lois discrètes. Enfin, nous aborderons le problème fondamental de l'étude d'une somme de variables non-indépendantes.

## Tome 2 - Tarification et provisionnement

Le second tome initiera le lecteur à différentes techniques abondamment utilisées en matière de tarification et de provisionnement en assurance non-vie.

Le neuvième chapitre sera consacré à la tarification *a priori* des contrats d'assurance. Nous verrons pourquoi l'actuaire désire segmenter le portefeuille et comment il peut s'y prendre. Nous concentrerons notre propos sur les modèles de régression de type GLM et nous verrons que cette approche permet en général une analyse fine de la sinistralité observée pour un portefeuille.

Les deux chapitres suivants seront axés sur la tarification *a posteriori* des contrats. En assurance automobile par exemple, un certain nombre de variables exogènes permettent d'obtenir une tarification *a priori*, en tenant compte du sexe, de l'âge, du type d'utilisation du véhicule. L'approche proposée dans ce dixième chapitre permet d'affiner l'évaluation *a priori* du risque en tenant compte du passé sinistre de l'assuré. Ce chapitre proposera l'approche par la théorie de la crédibilité. Notons que la notion même de crédibilité est étroitement liée à la perception que l'on peut avoir du risque (comme le note SAVAGE (1954), la "*personalistic view of probability*"): les individus accordent une *crédibilité* différente à la réalisation de tel ou tel état de la nature. Savage parle de *degré de conviction*. Cette notion est étroitement liée à celle introduite par Thomas Bayes en 1763. Mais si ce concept a trouvé son nom au milieu du vingtième siècle, dès 1910, les employés de General Motors qui étaient assurés contre les accidents du travail, bénéficiaient d'une prime calculée sur ce principe, formalisé en 1914 par Mowbray et repris en 1918 par

Withney:

*"the problem of experience rating arises out the necessity [...] of striking a balance between class-experience on the one hand and risk-experience on the other"*.

Notons qu'avant de s'imposer avec la contribution de Hans Bühlmann en 1967, cette approche utilisant la règle de Bayes fut fortement critiquée<sup>2</sup>.

Le onzième chapitre, dans la continuité du précédent, présentera les modèles permettant d'allouer des surprimes (d'infliger un malus) si l'assuré a des sinistres, et des récompenses pour les assurés n'ayant pas eu de sinistre (via l'octroi d'un bonus) à l'aide de systèmes bonus-malus. La théorie du bonus (ou "*une méthode pour calculer une ristourne adéquate pour années sans sinistres*") pour reprendre le titre d'un article de Bichsel a été introduite par Maurice Fréchet dès 1938 dans son ouvrage intitulé "*Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités*". En particulier, il a émis l'idée d'utiliser les chaînes de Markov (idée que nous développerons en détails dans ce chapitre). Ces modèles existent dans la plupart des pays développés, sous le nom de *no-claim bonus*, ou *système bonus-malus* (en Suède dès 1952, en Belgique en 1971, en France en 1976 - obligatoire depuis 1991, au Québec en 1978, etc.).

Le douzième chapitre abordera l'étude micro-économique de l'assurance. La théorie microéconomique de l'assurance est née au milieu des années soixante de la rencontre entre un actuaire, Karl Borch, et un économiste (futur Prix Nobel), Kenneth Arrow. Karl Borch voulait fournir un fondement théorique satisfaisant aux pratiques des assureurs. Kenneth Arrow cherchait un champ d'application à l'économie de l'incertain, théorie économique qu'il avait contribué à faire naître. Depuis Arrow et Borch, le rapprochement entre l'actuariat et la théorie microéconomique n'a cessé d'être fructueux, tant et si bien que la théorie de l'utilité est devenue aujourd'hui un des piliers méthodologiques des sciences actuarielles.

La théorie de la décision en environnement incertain permet de prendre en compte, de façon relativement simple, la variété des comportements des agents économiques face au risque. On peut ainsi donner un sens précis aux concepts de prime de risque, d'aversion pour le risque et modéliser le choix des investisseurs. La théorie de l'utilité

<sup>2</sup>. On retiendra la critique de Fischer, en 1919, reprise par Bailey en 1950, qui reprochait à Withney (et à Bayes) de supposer que toutes les valeurs possibles étaient équiprobables ("*assumption of equal distribution of ignorance*").

visse essentiellement à rationaliser les choix des agents économiques confrontés à des situations risquées.

Le treizième chapitre présente les méthodes stochastiques de provisionnement, et plus particulièrement des provisions pour sinistres à payer. Cette notion de *claims reserving*, dans la terminologie anglo-saxonne, est d'ailleurs fondamentale en actuariat non-vie. Cette prise en compte de la dimension temporelle dans la gestion des sinistres est difficile et technique : pour une période de couverture donnée, les sinistres (éventuels) peuvent être déclarés relativement tardivement, avec en plus parfois des temps d'expertise ou de tractation, avant d'arriver à un coût final, plus ou moins éloigné des estimations initiales. Compte tenu de cette dynamique temporelle observée dans le passé, le but est alors d'estimer au mieux la charge totale de sinistres pour une année de survenance donnée, afin d'allouer le montant de réserves adéquat. La méthode la plus simple est celle dite de *chain-ladder*, qui sera présentée dans un premier temps, ainsi que des variantes déterministes. En retenant le précepte de William Feller, "*the naive approach may be the most sophisticated one*", nous allons voir dans ce chapitre comment cette méthode (correspondant finalement à une *règle de trois*), couramment utilisée par les compagnies d'assurance peut être légitimée par une approche stochastique. Nous verrons d'ailleurs comment améliorer ce modèle souvent trop simpliste, en présentant plusieurs modèles, datant des vingt dernières années. Nous montrerons enfin comment unifier toutes ces approches à l'aide des modèles linéaires généralisés (GLM). Plusieurs autres approches seront également évoquées (utilisation du bootstrap, des filtres de type Kalman...).

Le quatorzième chapitre présentera quelques outils théoriques permettant de modéliser et de quantifier les risques extrêmes. La tarification *a priori* ne traite en effet que les sinistres "standards" et ce chapitre montrera comment gérer les sinistres graves. Nous évoquerons ainsi les principaux résultats de la théorie des valeurs extrêmes, comme la loi du sinistre maximum (théorème dit de Fisher-Tippett), ou l'étude proprement dite de la queue (distribution au-delà d'un seuil). Nous évoquerons également deux problèmes plus complexes : le cas où les observations ne sont plus indépendantes, et la notion d'extrême dans un cadre multivarié (la notion d'extrême étant liée à une notion d'ordre, le problème se complexifie pour des risques multiples puisqu'il n'y a plus une unique façon d'ordonner les sinistres). Cette étude des extrêmes est

étroitement liée à la notion de réassurance, que nous n'aborderons pas dans le détail dans cet ouvrage.

Le quinzième chapitre présente un certain nombre de méthodes numériques, avec des applications en assurance non-vie (même si les méthodes peuvent largement être utilisées pour traiter d'autres problématiques). Les premières sections de ce chapitre seront orientées vers les méthodes numériques (et non pas stochastiques, contrairement aux sections suivantes), et plus particulièrement vers la transformée de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform*), ou plus généralement les méthodes d'ondelettes (ou *wavelets*). Ces méthodes permettent par exemple d'approcher les lois de Poisson composées. Toutes les sections suivantes sont basées sur des méthodes stochastiques de simulation. Il existe tant de méthodes (également appelées méthodes de *Monte Carlo*) qu'écrit un unique chapitre sur le sujet est forcément réducteur. L'objectif est donc de présenter, de façon introductive, et claire, les notions les plus utilisées, sans nécessairement présenter les méthodes les plus modernes. La notion centrale est celle de la vitesse de convergence : il s'agit d'obtenir, avec un minimum de calculs, ou un minimum de temps, le résultat le plus proche possible de la réalité. C'est pour cela que nous insisterons dans ce chapitre sur les méthodes de réduction de variance de l'estimateur, tout en présentant également les méthodes dites de quasi Monte Carlo (liant les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques de simulation). Nous évoquerons aussi brièvement la notion de Monte Carlo par chaînes de Markov (ou MCMC), de simulation de vecteurs aléatoires, ou de processus stochastiques. Différentes applications en sciences actuarielles viendront illustrer les méthodes présentées.

Enfin, le seizième et dernier chapitre traitera des limites de l'assurabilité, et donc du cadre d'application des méthodes décrites dans les Tomes 1 et 2.

## Remerciements

Avant de conclure cette préface, nos plus sincères remerciements vont à nos collègues, qui ont accepté de porter un regard critique et constructif sur ce texte, à différents stades de son évolution. Nous voudrions ainsi remercier Anne-Cécile Goderniaux, Hélène Guérin, Alkis Tsimaratos et Jean-François Walhin. Nous souhaitons également exprimer notre gratitude envers le professeur Chris-

tian Gouriéroux pour ses nombreux commentaires et suggestions, qui ont permis de corriger et d'améliorer sensiblement le texte, mais aussi pour avoir accepté de nous publier dans cette prestigieuse collection.

Les nombreux étudiants à qui les auteurs ont eu le grand plaisir d'inculquer les sciences actuarielles, ont largement contribué à améliorer la présentation de l'exposé. Nous tenons ici à nous excuser de nous être servis d'eux comme autant de cobayes involontaires. Notre gratitude leur est acquise.

Merci également aux demandes insistantes d'un certain nombre de professionnels de l'assurance souhaitant que leur soient exposées de façon claire des méthodes récentes afin de traiter des risques de plus en plus complexes. Sans eux, cet ouvrage n'aurait probablement jamais vu le jour. Qu'ils en soient remerciés.

Enfin, *last but not least*, nous tenons à remercier nos employeurs respectifs, pour le cadre de travail agréable et les moyens qu'ils mettent à notre disposition, afin de développer un travail scientifique de qualité.

## Conclusion

*"... and this is only the beginning!"*  
(Actuarial Review, août 1997)

Comme l'indique le sous-titre de ce premier tome, cet ouvrage pose les bases des outils mathématiques et probabilistes utilisés en assurance non-vie. Le second tome sera consacré à deux notions centrales du travail de l'actuaire en assurance non-vie: la tarification et le provisionnement.

Le second tome débutera avec une présentation des méthodes de tarification *a priori* basées sur les modèles linéaires généralisés (les GLM). Dans la lignée de ce qui a été introduit dans ce premier tome, nous verrons comment effectuer une tarification *a priori* en prenant en compte des variables explicatives pour segmenter le tarif, et ainsi offrir un prime plus "juste". Comme nous l'avons noté dans ce premier tome, la grande difficulté en assurance est d'établir un tarif pour un portefeuille hétérogène, en évitant, pour des raisons d'antisélection, d'offrir une prime homogène. Afin de tenir compte des particularités des assurés (et du bien assuré), il s'agit de modéliser la charge financière des sinistres pour un assuré (en séparant éventuellement entre fréquence et coût moyen) en utilisant les caractéristiques des individus. A la fin du 19<sup>e</sup> siècle, Galton et Gauss ont introduit le modèle linéaire afin de modéliser une variable  $Y$  en fonction de variables  $X_1, \dots, X_p$ , dites explicatives, avec souvent une hypothèse d'erreur gaussienne. Si ces modèles économétriques peuvent s'appliquer pour des variables conditionnellement gaussiennes, ils s'avèrent d'usage très limité pour modéliser un nombre de sinistres (à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ) ou un coût de sinistre (qui ne peut être négatif). Nous présenterons alors les principaux résultats sur les modèles linéaires généralisés (GLM), introduits (sous leur forme unifiée) par Nelder et Wedderburn en 1972, ainsi que les modèles additifs généralisés (GAM).



Nous verrons ensuite comment prendre en compte le passé sinistre d'un client soit à l'aide des modèles dits de bonus-malus, soit à l'aide de la théorie de la crédibilité, en reprenant les modèles bayésiens, ainsi que l'approche initiée par Hans Bühlmann.

Le chapitre suivant abordera l'étude micro-économique de l'assurance. Celle-ci, née au milieu des années soixante de la rencontre entre un actuaire, Karl Borch, et un économiste (futur Prix Nobel), Kenneth Arrow, fournit un fondement théorique satisfaisant aux pratiques des assureurs. La théorie de la décision en environnement incertain permet de prendre en compte, de façon relativement simple, la variété des comportements des agents économiques face au risque. Nous examinerons différents paradigmes de décision en univers incertain, et nous étudierons leurs conséquences en matière d'assurance.

Si cette modélisation de l'actif (de la prime) est le quotidien de l'actuaire, il convient de noter que les modèles présentés jusqu'à présent pour modéliser la charge sinistres sont souvent éloignés de la réalité. En effet, nous supposons toujours connaître le montant  $X_i$  du  $i$ ème sinistre. Or ce montant est rarement connu le jour même de la survenance: il convient de prendre en compte cette importante source d'aléa liée à la dynamique de la gestion des sinistres. Lors de la clôture des comptes, les montants des sinistres survenus doivent être estimés, et provisionnés (*loss reserving process*). Nous verrons comment l'actuaire évalue le montant de ces provisions.

Afin d'étudier plus en détail la charge totale des sinistres pour un assureur, nous nous attacherons à voir comment modéliser le mieux possible les catastrophes, ces quelques rares sinistres qui peuvent représenter plus de la moitié de la charge totale. Comme le dit l'adage populaire, "*ce qui est rare est cher*". Nous verrons combien cette maxime prend son sens en actuariat. Nous présenterons les résultats principaux de la théorie des extrêmes proposant des fondements théoriques permettant d'obtenir de relativement bons résultats. Comme le notait Paul Embrechts, cette théorie "*devrait à l'avenir occuper la même place dans le quotidien des gestionnaires de risques que les événements extrêmes qu'elle tente d'analyser*".

Le chapitre suivant proposera des outils pratiques permettant de mener à bien les calculs. Les modèles en assurance non-vie devenant de plus en plus complexes, il est rare d'avoir des relations analytiques, permettant d'obtenir des mesures de risques, une distribution de charge totale, ou une probabilité de ruine. Nous verrons ainsi plusieurs méthodes numériques permettant soit d'avoir des approximations, soit d'avoir des estimations, en particulier en utilisant les méthodes de simulation.

Enfin, le dernier chapitre examinera les limites de l'assurabilité. Il y sera précisé le type de situation où les techniques présentées dans cet ouvrage ne trouvent pas à s'appliquer.

A l'issue de ces deux tomes, le lecteur aura acquis les techniques modernes de l'assurance non-vie.

# Table des matières

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Le risque et sa couverture contractuelle</b>                     | <b>1</b> |
| 1.1      | Le risque   | 1        |
| 1.1.1    | Vous avez dit risque?   | 1        |
| 1.1.2    | La raison de l'assurance: la risquophobie                           | 2        |
| 1.1.3    | Méthodes de gestion du risque                                       | 3        |
| 1.1.4    | Véhicules de gestion des risques                                    | 5        |
| 1.1.5    | Risques pris en charge par les assureurs                            | 7        |
| 1.1.6    | Gestion des risques par l'assureur                                  | 9        |
| 1.1.7    | Risques assurantiels et risques financiers                          | 12       |
| 1.2      | <i>Alea iacta est...</i>  | 14       |
| 1.2.1    | Insolvabilité de l'assureur   | 14       |
| 1.2.2    | Cadences de règlement   | 14       |
| 1.2.3    | Nécessité du provisionnement  | 15       |
| 1.2.4    | Inversion du cycle de production                                    | 16       |
| 1.2.5    | Le passif: reflet de l'activité de l'assureur                       | 17       |
| 1.2.6    | Primes émises, primes acquises                                      | 20       |
| 1.2.7    | Les assureurs, investisseurs institutionnels                        | 21       |
| 1.2.8    | Gestion actif-passif  | 22       |
| 1.3      | Le contrat d'assurance  | 23       |
| 1.3.1    | Les origines: le contrat d'assurance maritime                       | 23       |
| 1.3.2    | La naissance de l'assurance terrestre: le grand incendie de Londres | 24       |
| 1.3.3    | De la solidarité informelle à l'assurance                           | 25       |
| 1.3.4    | Contrat et police   | 26       |
| 1.3.5    | Assuré, preneur d'assurance et bénéficiaire                         | 26       |
| 1.3.6    | Et la technique dans tout ça?                                       | 26       |
| 1.3.7    | Prestations des parties   | 27       |
| 1.4      | Notes bibliographiques  | 31       |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>2</b> | <b>Modélisation actuarielle des risques</b>                  | <b>33</b> |
| 2.1      | Introduction   | 33        |
| 2.2      | Description probabiliste du risque                           | 34        |
| 2.2.1    | Événements   | 34        |
| 2.2.2    | Calcul des probabilités et absence d'opportunité d'arbitrage | 35        |
| 2.2.3    | Probabilité conditionnelle                                   | 41        |
| 2.2.4    | Événements indépendants                                      | 42        |
| 2.2.5    | Règle de multiplication (de Bayes)                           | 42        |
| 2.2.6    | Événements conditionnellement indépendants                   | 43        |
| 2.2.7    | Théorème des probabilités totales                            | 43        |
| 2.2.8    | Théorème de Bayes  | 44        |
| 2.3      | Variables aléatoires   | 45        |
| 2.3.1    | Définition   | 45        |
| 2.3.2    | Fonction de répartition                                      | 47        |
| 2.3.3    | Support d'une variable aléatoire                             | 49        |
| 2.3.4    | Fonction de queue  | 49        |
| 2.3.5    | Egalité en loi   | 50        |
| 2.3.6    | Quantiles et inverses généralisés                            | 51        |
| 2.4      | Variables aléatoires de comptage                             | 54        |
| 2.4.1    | Notion   | 54        |
| 2.4.2    | Variable uniforme discrète                                   | 55        |
| 2.4.3    | Variables de Bernoulli                                       | 56        |
| 2.4.4    | Variable binomiale   | 56        |
| 2.4.5    | Variable géométrique   | 57        |
| 2.4.6    | Variable binomiale négative                                  | 58        |
| 2.4.7    | Variable de Poisson  | 59        |
| 2.5      | Variables aléatoires continues                               | 60        |
| 2.5.1    | Notion   | 60        |
| 2.5.2    | Variable uniforme continue                                   | 62        |
| 2.5.3    | Variable Bêta  | 63        |
| 2.5.4    | Variable normale   | 64        |
| 2.5.5    | Variable log-normale   | 66        |
| 2.5.6    | Variable aléatoire exponentielle négative                    | 67        |
| 2.5.7    | Variable Gamma   | 69        |
| 2.5.8    | Variable de Pareto   | 72        |
| 2.6      | Vecteur aléatoire  | 74        |
| 2.6.1    | Définition   | 74        |
| 2.6.2    | Fonction de répartition                                      | 74        |
| 2.6.3    | Indépendance   | 77        |
| 2.6.4    | Vecteur normal   | 78        |
| 2.6.5    | Vecteurs elliptiques   | 81        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.6.6    | Vecteur multinomial . . . . .  | 84         |
| 2.7      | Lois conditionnelles . . . . .   | 85         |
| 2.7.1    | Le cas des variables de comptage . . . . .   | 85         |
| 2.7.2    | Le cas des variables continues . . . . .   | 86         |
| 2.7.3    | Le cas mixte: une variable de comptage et une autre continue . . . . .                   | 87         |
| 2.7.4    | Indépendance conditionnelle . . . . .  | 88         |
| 2.8      | Lois composées . . . . .   | 89         |
| 2.8.1    | Définition . . . . .   | 89         |
| 2.8.2    | Produit de convolution . . . . .   | 90         |
| 2.8.3    | Fonction de répartition associée à une loi composée . . . . .                            | 93         |
| 2.9      | Transformations des risques et clauses conventionnelles relatives aux dommages . . . . . | 94         |
| 2.9.1    | Concept . . . . .  | 94         |
| 2.9.2    | Le découvert obligatoire . . . . .   | 94         |
| 2.9.3    | La franchise . . . . .   | 96         |
| 2.9.4    | Plafond d'indemnisation . . . . .  | 96         |
| 2.9.5    | Conséquence technique: la censure . . . . .  | 97         |
| 2.9.6    | Loi de Poisson et clauses relatives aux dommages . . . . .                               | 97         |
| 2.9.7    | Effets pervers des clauses conventionnelles relatives au dommage . . . . .               | 99         |
| 2.10     | Exercices . . . . .  | 100        |
| 2.11     | Notes bibliographiques . . . . .   | 102        |
| <b>3</b> | <b>La prime pure</b> . . . . .   | <b>105</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .   | 105        |
| 3.2      | La prime pure et l'espérance mathématique . . . . .                                      | 107        |
| 3.2.1    | Espérance mathématique . . . . .   | 107        |
| 3.2.2    | Probabilités et espérances d'indicatrices . . . . .                                      | 114        |
| 3.2.3    | Détermination de la prime pure . . . . .   | 115        |
| 3.2.4    | Ecart quadratique moyen, un must? . . . . .  | 115        |
| 3.3      | Variance . . . . .   | 116        |
| 3.3.1    | Définition . . . . .   | 116        |
| 3.3.2    | Interprétation actuarielle . . . . .   | 117        |
| 3.3.3    | Quelques exemples . . . . .  | 117        |
| 3.3.4    | Propriétés . . . . .   | 119        |
| 3.3.5    | Variance des lois usuelles . . . . .   | 120        |
| 3.3.6    | Variance des lois composées . . . . .  | 120        |
| 3.3.7    | Coefficient de variation et mutualisation des risques . . . . .                          | 122        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.4      | Assurance et Bienaymé-Tchebycheff . . . . .  | 122        |
| 3.4.1    | Inégalité de Markov . . . . .  | 122        |
| 3.4.2    | Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff . . . . .  | 123        |
| 3.4.3    | Interprétation actuarielle de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff . . . . .          | 123        |
| 3.4.4    | Caractère conservatif de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff . . . . .               | 124        |
| 3.5      | Assurance et loi des grands nombres . . . . .  | 124        |
| 3.5.1    | Convergence en probabilité . . . . .   | 124        |
| 3.5.2    | Convergence de la charge moyenne de sinistre par police vers la prime pure . . . . . | 125        |
| 3.5.3    | Le cas de la réparation forfaitaire . . . . .  | 128        |
| 3.5.4    | Le cas de la réparation indemnitaire . . . . .                                       | 129        |
| 3.6      | Fonctions caractéristiques . . . . .   | 129        |
| 3.6.1    | Fonction génératrice des probabilités . . . . .                                      | 129        |
| 3.6.2    | Transformée de Laplace . . . . .   | 132        |
| 3.6.3    | Fonction génératrice des moments . . . . .   | 136        |
| 3.6.4    | Taux de hasard . . . . .   | 140        |
| 3.6.5    | Primes stop-loss . . . . .   | 141        |
| 3.7      | Hétérogénéité et mélanges . . . . .  | 145        |
| 3.7.1    | Contexte . . . . .   | 145        |
| 3.7.2    | Un exemple simple... . . . .   | 145        |
| 3.7.3    | Mélanges de Poisson . . . . .  | 149        |
| 3.7.4    | Théorème de Shaked . . . . .   | 154        |
| 3.7.5    | Lois de Poisson mélange composées . . . . .  | 155        |
| 3.7.6    | Mélanges d'exponentielles . . . . .  | 159        |
| 3.8      | La prime pure en univers segmenté . . . . .  | 162        |
| 3.8.1    | Les techniques de segmentation . . . . .   | 162        |
| 3.8.2    | L'espérance conditionnelle . . . . .   | 165        |
| 3.8.3    | Personnalisation des primes . . . . .  | 170        |
| 3.8.4    | Segmentation, mutualisation et solidarité . . . . .                                  | 173        |
| 3.8.5    | Formalisation du concept de segmentation . . . . .                                   | 175        |
| 3.8.6    | Inconvénients résultant d'une segmentation poussée . . . . .                         | 178        |
| 3.8.7    | Segmentation et asymétrie de l'information . . . . .                                 | 180        |
| 3.9      | Exercices . . . . .  | 183        |
| 3.10     | Notes bibliographiques . . . . .   | 186        |
| <b>4</b> | <b>De la prime pure à la prime nette</b> . . . . .                                   | <b>187</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .   | 187        |
| 4.2      | Assurance et théorème central-limite . . . . .                                       | 188        |
| 4.2.1    | Théorème central-limite . . . . .  | 188        |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4.2.2 | Qualité de l'approximation basée sur le théorème central-limite . . . . .                         | 189 |
| 4.2.3 | Théorème central-limite et loi des grands nombres   | 190 |
| 4.2.4 | Théorème central-limite pour la loi de Poisson composée . . . . .                                 | 190 |
| 4.2.5 | Approximation de la fonction de queue dans le cas de la réparation forfaitaire . . . . .          | 191 |
| 4.2.6 | Approximation de la fonction de queue dans le cas de la réparation indemnitaire . . . . .         | 191 |
| 4.2.7 | Prime pure vue comme prix minimum du risque   | 191 |
| 4.2.8 | Sensibilité des résultats à une éventuelle dépendance   | 192 |
| 4.2.9 | Les lois stables . . . . .  | 193 |
| 4.3   | Probabilité de ruine sur une période . . . . .  | 195 |
| 4.3.1 | Définition . . . . .  | 196 |
| 4.3.2 | Approximation basée sur le théorème central-limite . . . . .                                      | 196 |
| 4.3.3 | Le cas de la réparation forfaitaire . . . . .   | 196 |
| 4.3.4 | Le cas de la réparation indemnitaire . . . . .  | 198 |
| 4.4   | Chargement de sécurité . . . . .  | 201 |
| 4.4.1 | Notion . . . . .  | 201 |
| 4.4.2 | Détermination du chargement de sécurité sur base du théorème central-limite . . . . .             | 201 |
| 4.4.3 | De l'absolue nécessité du chargement de sécurité  | 203 |
| 4.4.4 | Principe de calcul des primes . . . . .   | 204 |
| 4.5   | Coefficient de sécurité . . . . .   | 207 |
| 4.5.1 | Résultat technique de la compagnie . . . . .  | 207 |
| 4.5.2 | Conséquences de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff   | 208 |
| 4.5.3 | Détermination du coefficient de sécurité . . . . .  | 209 |
| 4.5.4 | Détermination du chargement de sécurité sur base de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff . . . . . | 209 |
| 4.6   | L'approximation Normal-Power (NP) . . . . .   | 210 |
| 4.6.1 | Le coefficient d'asymétrie . . . . .  | 210 |
| 4.6.2 | Développement d'Edgeworth . . . . .   | 211 |
| 4.6.3 | Approximation d'Esscher . . . . .   | 214 |
| 4.6.4 | Approximation NP . . . . .  | 219 |
| 4.6.5 | En guise de conclusion à propos des approximations d'Esscher et NP . . . . .                      | 224 |
| 4.7   | La prime commerciale . . . . .  | 225 |
| 4.8   | Exercices . . . . .   | 226 |
| 4.9   | Notes bibliographiques . . . . .  | 229 |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>5</b> | <b>Mesure et comparaison des risques</b>                                   | <b>231</b> |
| 5.1      | Introduction . . . . .   | 231        |
| 5.1.1    | Mesurer le risque: une tâche essentielle de l'actuaire . . . . .           | 231        |
| 5.1.2    | Comparer les risques: une autre spécialité de l'actuaire . . . . .         | 232        |
| 5.1.3    | Mesurer puis comparer les risques, deux tâches voisines . . . . .          | 232        |
| 5.2      | Mesures de risque . . . . .  | 233        |
| 5.2.1    | Définition . . . . .   | 233        |
| 5.2.2    | Cohérence . . . . .  | 233        |
| 5.2.3    | Value-at-Risk . . . . .  | 235        |
| 5.2.4    | Tail-VaR et mesures apparentées . . . . .                                  | 237        |
| 5.2.5    | Mesure de risque d'Esscher . . . . .                                       | 240        |
| 5.2.6    | Mesures de risque de Wang . . . . .  | 242        |
| 5.3      | Comparaison uniforme des VaR . . . . .                                     | 247        |
| 5.3.1    | Définition . . . . .   | 247        |
| 5.3.2    | Conditions équivalentes . . . . .  | 248        |
| 5.3.3    | Propriétés . . . . .   | 250        |
| 5.3.4    | Taux de hasard et mesure de risque PH . . . . .                            | 251        |
| 5.3.5    | Rapport de vraisemblance et principe d'Esscher                             | 253        |
| 5.4      | Comparaison uniforme des TVaR . . . . .                                    | 255        |
| 5.4.1    | Définition . . . . .   | 255        |
| 5.4.2    | Conditions équivalentes . . . . .  | 256        |
| 5.4.3    | Condition suffisante . . . . .   | 260        |
| 5.4.4    | Propriétés . . . . .   | 261        |
| 5.5      | Forme optimale de transfert de risque . . . . .                            | 265        |
| 5.5.1    | Le problème . . . . .  | 265        |
| 5.5.2    | Fonctions indemnitaires admissibles . . . . .                              | 265        |
| 5.5.3    | Ordonnancement des contrats . . . . .                                      | 266        |
| 5.5.4    | Optimalité du contrat stop-loss . . . . .                                  | 267        |
| 5.6      | Information incomplète . . . . .   | 267        |
| 5.6.1    | Contexte . . . . .   | 267        |
| 5.6.2    | Moyenne et support connus . . . . .  | 267        |
| 5.6.3    | Application au calcul d'une prime stop-loss sur données groupées . . . . . | 268        |
| 5.7      | Exercices . . . . .  | 269        |
| 5.8      | Notes bibliographiques . . . . .   | 273        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>6</b> | <b>Calcul de la marge de solvabilité et de primes stop-loss dans le modèle collectif</b> | <b>275</b> |
| 6.1      | Introduction   | 275        |
| 6.1.1    | Les différents niveaux de travail  | 275        |
| 6.1.2    | Le modèle individuel   | 275        |
| 6.1.3    | La charge totale des sinistres dans le modèle individuel                                 | 276        |
| 6.1.4    | Difficulté des calculs dans le modèle individuel   | 277        |
| 6.1.5    | Le modèle collectif  | 278        |
| 6.2      | Approximation du modèle individuel   | 279        |
| 6.2.1    | Formalisation du modèle individuel   | 279        |
| 6.2.2    | Représentation de la charge totale des sinistres dans le modèle individuel               | 280        |
| 6.2.3    | Justification de l'approximation du modèle individuel par le modèle collectif            | 282        |
| 6.2.4    | Passage du modèle individuel au modèle collectif   | 283        |
| 6.2.5    | Choix des paramètres du modèle collectif   | 284        |
| 6.2.6    | Bornes sur l'erreur d'approximation: fonction de répartition                             | 285        |
| 6.2.7    | Etude numérique de la qualité de l'approximation collective des fonctions de répartition | 290        |
| 6.2.8    | Bornes sur l'erreur d'approximation: primes stop-loss                                    | 291        |
| 6.3      | Discrétisation des coûts des sinistres   | 295        |
| 6.3.1    | Nécessité de la discrétisation   | 295        |
| 6.3.2    | Discrétisation en accord avec la VaR   | 296        |
| 6.3.3    | Discrétisation en accord avec la TVaR  | 298        |
| 6.4      | Algorithme de Panjer   | 302        |
| 6.4.1    | De la difficulté d'une approche directe  | 302        |
| 6.4.2    | Famille de Panjer  | 304        |
| 6.4.3    | Algorithme de Panjer pour coûts de sinistres positifs                                    | 305        |
| 6.4.4    | Algorithme de Panjer pour coûts de sinistre non-négatifs                                 | 308        |
| 6.4.5    | Evaluation des probabilités de ruine sur une période                                     | 309        |
| 6.4.6    | Evaluation de la VaR et de la marge de solvabilité                                       | 310        |
| 6.5      | Evaluation des primes stop-loss  | 310        |
| 6.5.1    | Schéma itératif de calcul des primes stop-loss   | 310        |
| 6.5.2    | Erreur due à la discrétisation   | 311        |
| 6.6      | Exercices  | 314        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 6.7      | Notes bibliographiques  | 315        |
| <b>7</b> | <b>Equilibre à long terme des résultats de la compagnie</b>   | <b>317</b> |
| 7.1      | Introduction  | 317        |
| 7.2      | Modèle discret de de Finetti  | 318        |
| 7.2.1    | Description du modèle   | 318        |
| 7.2.2    | Probabilité de ruine  | 319        |
| 7.2.3    | Théorème de de Finetti  | 319        |
| 7.2.4    | Application à la détermination du taux de chargement de sécurité                                      | 320        |
| 7.3      | Modèle continu de Poisson composé   | 322        |
| 7.3.1    | Processus de Poisson homogène   | 322        |
| 7.3.2    | Evolution du résultat de la compagnie   | 328        |
| 7.3.3    | La probabilité de ruine sur horizon infini  | 329        |
| 7.3.4    | Lien avec le modèle discret de de Finetti   | 330        |
| 7.3.5    | Nécessité d'un chargement de sécurité pour éviter une ruine certaine                                  | 331        |
| 7.3.6    | Détermination de la probabilité de ruine sur horizon infini: Formule de Pollaczek-Khinchine-Beekman   | 332        |
| 7.3.7    | Expression explicite de la probabilité de ruine sur horizon infini pour la loi exponentielle négative | 336        |
| 7.3.8    | Comparaison de probabilités de ruine  | 337        |
| 7.3.9    | Inégalité de Cramér-Lundberg pour la probabilité de ruine à long terme                                | 339        |
| 7.3.10   | Probabilité de ruine et martingales   | 342        |
| 7.4      | Exercices   | 344        |
| 7.5      | Notes bibliographiques  | 346        |
| <b>8</b> | <b>Gestion des risques multiples</b>  | <b>347</b> |
| 8.1      | Introduction  | 347        |
| 8.2      | Comonotonie et antimonotonie  | 348        |
| 8.2.1    | Classes de Fréchet  | 348        |
| 8.2.2    | Bornes de Fréchet   | 348        |
| 8.2.3    | Dépendance parfaite: comonotonie et antimonotonie   | 351        |
| 8.3      | Mesures de dépendance   | 355        |
| 8.3.1    | Concept   | 355        |
| 8.3.2    | La corrélation linéaire ou corrélation de Pearson   | 356        |
| 8.3.3    | Coefficient de corrélation des rangs de Kendall   | 366        |
| 8.3.4    | Coefficient de corrélation des rangs de Spearman  | 369        |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 8.3.5 | Liens entre le tau de Kendall et le rho de Spearman . . . . .                     | 371 |
| 8.4   | Comparaison de la dépendance . . . . .  | 375 |
| 8.4.1 | Ordre de dépendance . . . . .   | 375 |
| 8.4.2 | Comparaison supermodulaire . . . . .  | 376 |
| 8.4.3 | Stabilité fonctionnelle des comparaisons supermodulaires . . . . .                | 377 |
| 8.4.4 | Comparaison supermodulaire et espace de Fréchet . . . . .                         | 378 |
| 8.4.5 | Comparaison supermodulaire et fonctions de répartition/de queue jointes . . . . . | 378 |
| 8.4.6 | Structures extrêmes de dépendance au sens supermodulaire . . . . .                | 379 |
| 8.4.7 | Comparaison supermodulaire et coefficients de corrélation . . . . .               | 379 |
| 8.4.8 | Ordre $\preceq_{TVaR,=}$ et comparaison supermodulaire . . . . .                  | 381 |
| 8.5   | Notions de dépendance positive . . . . .  | 382 |
| 8.5.1 | Concept . . . . .   | 382 |
| 8.5.2 | Dépendance positive par quadrant . . . . .  | 382 |
| 8.5.3 | Association . . . . .   | 387 |
| 8.5.4 | Croissance conditionnelle . . . . .   | 391 |
| 8.6   | Introduction à la théorie des copules . . . . .                                   | 392 |
| 8.6.1 | Principe . . . . .  | 392 |
| 8.6.2 | Définition . . . . .  | 395 |
| 8.6.3 | Théorème de Sklar . . . . .   | 395 |
| 8.6.4 | Propriétés des copules . . . . .  | 402 |
| 8.6.5 | Mesures de dépendance et copules . . . . .  | 411 |
| 8.7   | Copules archimédiennes . . . . .  | 416 |
| 8.7.1 | Définition . . . . .  | 416 |
| 8.7.2 | Modèles de “frailty” et copules archimédiennes . . . . .                          | 418 |
| 8.7.3 | Fonction de survie . . . . .  | 419 |
| 8.7.4 | Fonction de régression . . . . .  | 419 |
| 8.7.5 | Transformation intégrale bivariée . . . . .                                       | 420 |
| 8.7.6 | Relations d’ordre pour les copules archimédiennes . . . . .                       | 422 |
| 8.7.7 | Etude d’une fonction de deux risques corrélés . . . . .                           | 423 |
| 8.8   | Lois discrètes multivariées . . . . .   | 429 |
| 8.8.1 | Modèle à deux classes de risques corrélés . . . . .                               | 429 |
| 8.8.2 | Loi de Bernoulli multivariée . . . . .  | 430 |
| 8.8.3 | Modèle de Poisson à choc commun: loi de Poisson bivariée . . . . .                | 431 |
| 8.8.4 | Modèle de Bernoulli à choc commun: le modèle de Marceau . . . . .                 | 432 |
| 8.9   | Exercices . . . . .   | 433 |

|      |                                  |     |
|------|----------------------------------|-----|
| 8.10 | Notes bibliographiques . . . . . | 441 |
|------|----------------------------------|-----|