

QCM SÉRIES TEMPORELLES

ARTHUR CHARPENTIER

Pour rappels enfin, un processus $ARMA(p, q)$ vérifie une relation de la forme

$$X_t = m + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

où (ε_t) est un bruit blanc. Sauf précision contraire, on supposera que $m = 0$. Pour un processus stationnaire, on note $\gamma(\cdot)$ la fonction d'autocovariance, $\rho(\cdot)$ la fonction d'autocorrélation et $\psi(\cdot)$ la fonction d'autocorrélation partielle.

Dans les questions 1-6, on considère un modèle autorégressif de la forme

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{0.1}$$

où (ε_t) est un bruit blanc. On supposera que $\phi \neq 0$, et on supposera dans toute la section que la série (X_t) est stationnaire.

1] Laquelle des affirmations suivantes n'est pas correcte

- A. ε_t et X_{t-1} sont non-corrélés
- B. X_t et ε_{t-1} sont non-corrélés
- C. ε_t et ε_{t-1} sont non-corrélés
- D. X_t et ε_t sont corrélés

2] Laquelle des affirmations suivant est correcte

A. $\text{cor}(X_t, X_{t-1}) = \phi$

B. $\text{cor}(X_t, X_{t-2}) = 0$

C. $\text{cor}(X_t, \varepsilon_t) = 0$

D. $\text{cor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \phi$

On suppose ici que le bruit (ε_t) est de variance $\sigma^2 = 1$.

3] Que vaut la variance de (X_t) ?

A. $V(X_t) = 1$

B. $V(X_t) = (1 - \phi^2)$

C. $V(X_t) = \frac{1}{1 - \phi^2}$

D. $V(X_t) = 0$

On suppose que l'on travaille sur des données journalières. On a observé -1 hier, et $+1$ aujourd'hui

4] Quelle prévision feriez vous pour demain, à l'aide du modèle (0.1) ?

A. $\hat{X} = \phi$

B. $\hat{X} = -\phi$

C. $\hat{X} = 0$

D. $\hat{X} = \phi + \varepsilon$

- 5] Quel serait la variance de l'erreur de prévision à deux jours ?
- A. ϕ
 - B. 1
 - C. $1 + \phi^2$
 - D. ϕ^2
- 6] Une seule affirmation suivant est correcte. Laquelle ?
- A. La série $Y_t = t + X_t$ est stationnaire
 - B. La série $Y_t = X_t - X_{t-1}$ est stationnaire
 - C. La série Y_t vérifiant la relation $Y_t = Y_{t-1} + X_t$ est stationnaire
 - D. La série Y_t vérifiant la relation $Y_t = \phi^{-1}Y_{t-1} + \varepsilon_t$ est stationnaire

On suppose maintenant que la série (X_t) suit une processus $ARMA(1, 1)$

$$X_t = \phi X_{t-1} + \eta_t + \theta \eta_{t-1} \quad (0.2)$$

où (η_t) est un bruit blanc de variance σ^2 .

- 7] Quelle est la condition nécessaire et suffisante, sur ϕ , θ et σ , pour que (X_t) soit stationnaire
- A. $|\phi| < 1$, $|\theta| < 1$ et $\sigma^2 < 1$,
 - B. $|\phi| < 1$ et $|\theta| < 1$
 - C. $|\theta| < 1$
 - D. $|\phi| < 1$

- 8] Parmi les affirmations suivantes, une seule est toujours vraie. Laquelle ? (un seul choix est possible)
- A. Toutes les prédictions faites avec le modèle (0.2) seront identiques avec celles faites à l'aide du modèle (0.1)
 - B. Toutes les prédictions faites avec le modèle (0.2) auront une variance (conditionnelle à l'information disponible aujourd'hui) identiques à celles du modèle (0.1)
 - C. L'autocorrélation à l'ordre 1 est toujours non-nulle $\rho(1) \neq 0$
 - D. À partir, d'un moment, on retrouve la propriété vérifiée par les $AR(1)$ sur les autocorrélations, $\rho(h) = \phi\rho(h-1)$ (pour h assez grand).

- 9] Après réflexion, il semble que dans le modèle (0.2), $\phi + \theta = 0$. Quelle affirmation parmi les suivantes vous semble correcte
- A. (X_t) suit une marche aléatoire
 - B. (X_t) suit un bruit blanc
 - C. (X_t) est, en fait, un processus $AR(1)$
 - D. (X_t) est, en fait, un processus $MA(1)$

On suppose désormais que la série (X_t) suit un processus $AR(p)$ stationnaire,

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + u_t, \quad (0.3)$$

où (ε_t) est un bruit blanc. On supposera que $\phi_p \neq 0$.

10] Parmi les affirmations suivantes, une seule est (de manière générale) vraie. Laquelle ?

- A. la série des autocorrélations $\rho(h) = \text{cor}(X_t, X_{t-h})$ est nulle pour $h > p$
- B. la série des autocorrélations partielles $\psi(h) = \text{cor}(X_t - \text{EL}(X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}), X_{t-h}) - \text{EL}(X_{t-h} | X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1})$ est nulle pour $h > p$
- C. l'autocorrélation d'ordre p est non nulle, $\rho(p) \neq 0$
- D. l'autocorrélation d'ordre p vaut 1, $\rho(p) = 1$

11] Considérons la série temporelle $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$, où (ε_t) est un bruit blanc, avec $\sigma_\varepsilon^2 = 0.18$, et $Y_t = 0$ pour $t \leq 0$. Quelle est l'écart-type de Y_2 ?

- A. 0.6
- B. 1.2
- C. 3.0
- D. 3.6
- E. 7.2

12] Considérons la série temporelle

$$Y_t = \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}}{2}$$

où (ε_t) est un bruit blanc, avec $\sigma_\varepsilon^2 = 8$. Quelle est la covariance entre Y_t et Y_{t-1} ?

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4

13] Considérons la série temporelle

$$Y_t = \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_{t-7}}{8}$$

où (ε_t) est un bruit blanc, avec $\sigma_\varepsilon^2 = 0.64$. Quelle est la corrélation entre Y_t et Y_{t-1} ?

- A. 0.03
- B. 0.04
- C. 0.05
- D. 0.06
- E. 0.07

14] Considérons un processus $AR(1)$ stationnaire $AR(1)$ avec 200 observations. On observe $\hat{\gamma}(0) = 0.348$ et $\text{Var}(\bar{Y}) = 0.006$. Quelle est la valeur de ϕ ?

- A. 0.50
- B. 0.55
- C. 0.60
- D. 0.65
- E. 0.70

Dans les trois questions qui suivent, on considère un processus $MA(2)$, avec $\theta_1 = +0.2$, $\theta_2 = -0.7$ et $\sigma_\varepsilon^2 = 1$.

15] Quelle est la variance de Y_t ?

- A. 1.34
- B. 1.40
- C. 1.45
- D. 1.49
- E. 1.53

16] Quelle est la corrélation entre Y_t et Y_{t-1} ?

- A. -0.222
- B. -0.123
- C. -0.039
- D. $+0.039$
- E. $+0.222$

17] Quelle est la corrélation entre Y_t et Y_{t-2} ?

- A. -0.458
- B. -0.429
- C. $+0.429$
- D. $+0.441$
- E. $+0.458$

Dans les deux questions qui suivent, on considère un processus $AR(1)$, avec $\phi = -0.5$ et $\sigma_\varepsilon = 8.66$.

18] Quelle est la covariance entre Y_t et Y_{t-1} ?

- A. -30
- B. -40
- C. -50
- D. -70
- E. -90

19] Quelle est la covariance entre Y_t et Y_{t-2} ?

- A. 9
- B. 16

C. 25

D. 49

E. 81

Dans les deux questions qui suivent, on considère un processus $AR(1)$, avec $\phi > 0$, $\sigma_\varepsilon^2 = 5.333$, et $\gamma(2) = 3$.

20] Quelle est la valeur de ϕ , coefficient d'autocorrélation ?

A. 0.5

B. 0.6

C. 0.7

D. 0.8

E. 0.9

21] Quelle est la valeur de l'autocovariance $\gamma(1)$?

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

E. 8

Dans les quatre questions qui suivent, on considère un processus $ARMA(1,1)$, avec $\phi = -0.5$, $\theta = -0.6$ et $\sigma_\varepsilon^2 = 4$.

22] Quelle est la valeur de $\gamma(0)$?

A. +4.053

B. +4.063

C. +4.429

D. +4.706

E. +5.099

23] Quelle est la valeur de $\gamma(1)$?

A. -1.694

B. -0.438

C. +0.373

D. +1.029

E. +1.670

24] Quelle est la valeur de $\rho(1)$?

A. -0.360

B. -0.108

C. +0.092

D. +0.232

E. +0.328

25] Quelle est la valeur de $\rho(2)$?

A. -0.098

B. -0.093

C. -0.046

D. +0.065

E. +0.252

Dans les deux questions qui suivent, on considère un processus $ARIMA(2, 1, 2)$,

$$Y_t = 1 + 1.8Y_{t-1} - 1.4Y_{t-2} + 0.6Y_{t-3} + \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t1} + 0.1\varepsilon_{t-2}$$

26] Quelle est la valeur de ϕ_1 ?

- A. +0.4
- B. +0.5
- C. +0.6
- D. +0.7
- E. +0.8

27] Quelle est la valeur de ϕ_2 ?

- A. -0.6
- B. -0.5
- C. -0.4
- D. -0.3
- E. -0.2

Dans les deux questions qui suivent, on suppose que $Y_t = X_t + \varepsilon_t$ avec $X_t = X_{t-1} + u_t$, ou les bruits blancs (ε_t) et (u_t) sont indépendants, avec $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ et $\sigma_u^2 = 1$.

28] Quelle est la variance de ΔY_t ?

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6

29] Quelle est la corrélation entre de ΔY_t et ΔY_{t-1} ?

- A. -0.455
- B. -0.444
- C. -0.429
- D. -0.400
- E. -0.364

Dans les trois questions qui suivent, on considère un processus $AR(2)$, avec $\phi_1 = -0.5$ et $\phi_2 = -0.3$.

30] Quelle est la valeur de $\rho(1)$?

- A. -0.714
- B. -0.385
- C. $+0.135$
- D. $+0.385$
- E. $+0.714$

31] Quelle est la valeur de $\rho(2)$?

- A. -0.385
- B. -0.300
- C. -0.108
- D. $+0.300$
- E. $+0.657$

32] Quelle est la valeur de $\psi(2)$?

- A. -0.385
- B. -0.300
- C. -0.108
- D. $+0.300$
- E. $+0.657$

33] Considérons 100 observation d'un processus $AR(2)$ (Y_t) . On suppose que $\hat{\gamma}(0) = 4$, $\hat{\rho}(1) = 0.5$, $\hat{\rho}(2) = 0.5$ et $\bar{Y} = 1$. Quelle est la valeur de σ_ε^2

- A. 2.667
- B. 3.267
- C. 3.345
- D. 3.669
- E. 3.733

On considère dans les trois prochains questions un modèle MA saisonnier, avec

$$\Theta(L) = (1 - \theta_1 L)(1 - \theta_{12} L^{12})$$

et $Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$. On suppose que $\theta_1 = 0.3$, $\theta_{12} = 0.6$ et $\sigma^2 = 4$.

34] Quelle est la valeur de $\gamma(0)$?

- A. 5.93
- B. 6.26
- C. 6.42
- D. 6.96
- E. 7.50

- 35 On considère (Y_t) un processus $AR(2)$ avec $\phi_1 = 0.5$, $\phi_2 = 0.3$ de moyenne $\mu = 5$.
Si $Y_1 = 5$, $Y_2 = 7$ et $Y_3 = 5$, quelle serait la valeur de ε_3 ?
- A. -1.0
 - B. -0.8
 - C. -0.6
 - D. -0.4
 - E. -0.2