

EXERCICES, SÉRIES TEMPORELLES, HIVER 2014, MAT8181

ARTHUR CHARPENTIER

8 On considère deux séries stationnaires (X_t) et (Y_t) , telles que pour tout t et $h \in \mathbb{Z}$, $\text{Cov}(X_t, Y_{t+h}) = 0$. Montrer que $Z_t = X_t + Y_t$ est stationnaire. Donnez sa fonction d'autocovariance.

9 Soit (u_t) une suite de variables i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose

$$\begin{cases} \varepsilon_t = u_t \text{ si } t \text{ est pair} \\ \varepsilon_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{t-1}^2 - 1) \text{ si } t \text{ est impair} \end{cases}$$

La série (ε_t) est-elle un bruit blanc au sens faible ? au sens fort ?

10 Soit (X_t) un processus AR(1) d'innovation (ε_t) , et considérons un bruit blanc (η_t) indépendant de (ε_t) (au sens où $\text{cov}(\varepsilon_t, \eta_{t+h}) = 0$ pour tout t, h). Montrer que (Y_t) défini par $Y_t = X_t + \eta_t$ est un processus ARMA(1,1).

11 On considère le processus moyenne mobile suivant

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_{12} \varepsilon_{t-12}$$

où (ε_t) est un bruit blanc. Donnez les autocorrélations de la série (X_t) .

12 On considère le processus autorégressif suivant

$$X_t = \phi X_{t-1} + \phi^2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

où (ε_t) est un bruit blanc. A quelle(s) condition(s) sur ϕ existe-t-il une solution stationnaire ? Donnez les autocorrélations de la série (X_t) . A l'aide des équation de Yule-Walker, trouver des estimateurs pour ϕ et σ à partir de $\hat{\gamma}(0)$ et $\hat{\gamma}(1)$.

13 On considère un processus MA(1), $X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$. Mais on hésite entre $\theta = 3$ et $\theta = 1/3$. Donnez les fonctions d'autocorrélations dans ces deux cas.

14 Soit (X_t) une série stationnaire, de fonction d'autocovariance $\gamma(h)$.

(1) On pose, pour $n \geq 2$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$$

Exprimez la variance de \bar{X}_n en fonction des autocorrélations $\gamma(\cdot)$.

(2) On pose

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n [X_t - \bar{X}_n]^2$$

Exprimez $\mathbb{E}(S^2)$ en fonction de $\gamma(0)$ et de la variance de \bar{X}_n .

15 Soient (X_t) et (Y_t) deux processus AR(1), avec

$$(1 - aL)X_t = u_t \text{ et } (1 - bL)Y_t = v_t$$

où les bruits blancs (u_t) et (v_t) sont supposés indépendants, et où $a \neq b$. Montrer que (Z_t) défini comme $Z_t = X_t + Y_t$ suit un processus $ARMA(2, 1)$.

15★ Pour les plus motivés, montrer que plus généralement, si (X_t) et (Y_t) sont deux processus AR(p_X) et AR(p_Y), avec des bruits non-corrélés, et des racines distinctes, (Z_t) défini comme $Z_t = X_t + Y_t$ suit un processus $ARMA(p_X + p_Y, \max\{p_X, p_Y\})$.

16 On suppose que (X_t) un processus MA(1) d'innovation (ε_t) , avec

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}.$$

Malheureusement, une observation - à la date τ - manque.

- (1) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau-2}$ et $X_{\tau-1}$
- (2) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau+2}$ et $X_{\tau+1}$
- (3) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau-1}$ et $X_{\tau+1}$
- (4) laquelle de ces extrapolations aura l'erreur quadratique moyenne la plus faible ?

17 On suppose que (X_t) un processus AR(1) d'innovation (ε_t) , avec

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Malheureusement, une observation - à la date τ - manque.

- (1) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau-2}$ et $X_{\tau-1}$
- (2) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau+2}$ et $X_{\tau+1}$
- (3) quelle sera meilleure prévision linéaire de X_τ en fonction de $X_{\tau-1}$ et $X_{\tau+1}$
- (4) laquelle de ces extrapolations aura l'erreur quadratique moyenne la plus faible ?

18 Exercice de pratique

1. Trouver un mot clé, peu importe la langue et la région (ex: "gym" au Québec).

Aller sur

<https://www.google.com/trends/?hl=fr>

et recherchez le mot clé

<https://www.google.com/trends/explore#q=gym&geo=CA-QC&cmpt=geo>

Télécharger au format csv (sauver ensuite le fichier `report.csv` sur le disque dur).

2. Importer la base sous R à l'aide de la commande

```
report=read.table("report.csv", skip=4,header=TRUE,sep=" ",nrows=528)
```

3. La base étant constituée de données hebdomadaires, on va la transformer dans un format mensuel à l'aide du code suivant

```
H2M=function(BASE){
  X=BASE[,2]
  date1=substr(as.character(BASE$Semaine),1,10)
  date2=substr(as.character(BASE$Semaine),14,23)
  D1=as.Date(date1,"%Y-%m-%d")
  D2=as.Date(date2,"%Y-%m-%d")
  vm=vy=N=NA
  for(t in 1:length(D1)){
    mois=seq(D1[t],D2[t],length=7)
    vm=c(vm,as.POSIXlt(mois)$mon+1)
    vy=c(vy,as.POSIXlt(mois)$year+1900)
    N=c(N,rep(X[t],7))}
  N=N[-1];
  vm=vm[-1];
  vy=vy[-1]
  YM=vy*100+vm
  Z=tapply(N,as.factor(YM),mean)
  Zts=ts(Z,start=c(2004,1),frequency=12)
  return(Zts)}
```

Pour récupérer des données mensuelles, on utilisera

```
X= as.vector(H2M(report))
```

pour avoir un vecteur de chiffres, et non et une série temporelle.

A l'aides des méthodes vues en cours, proposer au moins trois modèles pour cette série. Avec ou sans tendance, avec sous sous composante saisonnière, et avec une composante ARMA(p,q).