

EXAMEN INTRA (3/4), ACT 2121

ARTHUR CHARPENTIER

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits.

Il y a 25 questions. Sur la feuille jointe, veuillez reporter vos réponses (une unique réponse par question)

- vous gagnez 1 points par bonne réponse
- vous gagnez 0 point par mauvaise réponse

Aucune justification n'est demandée.

Votre note finale est le total des points (sur 25).

Il y a 9 pages dans cet énoncé, merci de vérifier que le nombre de pages correspond, avant de débiter.

- 1 La fonction de densité de la loi marginale X est $f_X(x) = x + \frac{1}{2}$, $0 < x < 1$. La fonction de densité de la loi conditionnelle $Y|X = x$ est $f_{Y|X=x}(Y|X = x) = \frac{x + y}{x + \frac{1}{2}}$, $0 < y < 1$. Trouver la fonction de densité de la loi marginale Y .

A) $\frac{1}{2} + y$ B) $\frac{x + y}{y + \frac{1}{2}}$ C) $1 + y$ D) y E) $3y^2$

- 2 Soit X et Y des variables aléatoires continues de loi conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < 1, y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\text{Var}[X|Y = y]$.

A) $\frac{1}{12}$ B) y^2 C) 1 D) $\frac{y}{12}$ E) e^{-y}

- 3 Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (0.32) e^{-(0.8)x - (0.4)y} & \text{pour } 0 \leq x \text{ et } 0 \leq y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[Y - X]$.

A) -0.4 B) -1.25 C) 1.25 D) 0.32 E) 0.4

- 4] Soit X et Y des variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe $f_{X,Y}(x,y) = 4x$ pour $0 < x < \sqrt{y} < 1$. Trouver la fonction de densité de la marginale Y .

A) $2y$ B) $2y^2$ C) y^2 D) \sqrt{y} E) $4\sqrt{y}$

- 5] Soit X une variable aléatoire telle que :

$$M_X(t) = \frac{1}{5} (e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + e^{2t}).$$

Trouver $P(X \geq 0 \mid X \neq 1 \text{ ou } -1)$.

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

- 6] Soit X, Y, Z trois variables aléatoires discrètes de distribution simultanée :

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \frac{xyz}{108} \quad \text{pour } x = 1, 2, 3; \quad y = 1, 2, 3; \quad z = 1, 2.$$

Trouver la distribution conjointe de Y, Z sachant $X = 3$.

A) $\frac{yz}{108}$ B) $\frac{yz}{36}$ C) $\frac{yz}{18}$ D) $\frac{yz}{9}$ E) $\frac{yz}{3}$

- 7 Soit X et Y deux v.a. discrètes dont la distribution conjointe est donnée par le tableau :

		X		
		0	1	2
Y	0	0.3	0.2	0.1
	1	0.2	0.1	0.1

Trouver le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$.

- A) 0.02 B) 0.052 C) 0.092 D) 0.151 E) 0.252

- 8 Soit X et Y des variables aléatoires continues ayant la fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 15y & \text{pour } 0 \leq x^2 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de densité de la variable conditionnée $X|Y = \frac{1}{2}$ pour les valeurs possibles de x .

- A) $5(1 - \sqrt{x})$ B) $15(x - \sqrt{x})$ C) 1 D) $2x$ E) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$

- 9 Soit X et Y deux variables aléatoires telles que pour tout $y > 0$ on a :

$$f_Y(y) = e^{-y}, \quad E[X|Y = y] = 3y \quad \text{et} \quad \text{Var}[X|Y = y] = 2$$

Trouver $\text{Var}[X]$.

- A) 20 B) 11 C) 9 D) 5 E) 3

- 10] Pour une assurance, la perte X (en milliers de dollars) suit une loi de fonction de densité $f_X(x) = \frac{3x^2}{8}$ pour $0 \leq x \leq 2$. Si le temps (en heures) pour traiter la réclamation pour une perte $0 \leq x \leq 2$ est uniformément distribué entre x et $2x$, calculer la probabilité que ça prenne plus de 3 heures pour traiter une réclamation aléatoire.

A) $\frac{29}{64}$ B) $\frac{23}{64}$ C) $\frac{17}{64}$ D) $\frac{11}{64}$ E) $\frac{5}{64}$

- 11] Soit X et Y des variables aléatoires continues de loi de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x & \text{pour } 0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 2 - x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $P(X < 1)$.

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

- 12] Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $M_X(t) = e^{t^2+2t}$ et $M_Y(t) = e^{3t^2+t}$. Trouver la série génératrice des moments de $3X + Y$.

A) e^{12t^2+7t} B) $3e^{4t^2+3t}$ C) $3e^{t^2+2t} + e^{3t^2+t}$ D) $e^{9t^2+6t} + e^{3t^2+t}$ E) e^{6t^2+7t}

- 13] Soit X une variable aléatoire de type exponentielle de moyenne m et Y une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, m]$. En supposant X et Y indépendantes, trouver la série génératrice des moments de $X + Y$.

A) $\frac{e^{mt} - 1}{1 - m^2t^2}$ B) $\frac{e^{mt} - 1}{mt(1 - mt)}$ C) $\frac{e^{mt}}{mt - m^2t^2}$ D) $\frac{e^{mt}}{1 - mt}$ E) $\frac{1 - mt}{e^{mt}}$

- 14 Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2 - x - y) & \text{pour } 0 < x < 2, 0 < y < 2, x + y < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la probabilité conditionnelle $P(X < 1 \mid Y < 1)$.

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{49}{64}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{7}{8}$

- 15 Toutes les réclamations sont de montants égaux à 2 et le nombre N de réclamations suit une loi de Poisson de paramètre Λ . Cependant Λ est lui-même aléatoire et suit une loi exponentielle de moyenne 2.

Trouver la variance de la réclamation totale $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

- A) 24 B) 12 C) 8 D) 6 E) 4

- 16 Soit $F_X(x) = 1 - e^{-x}/3$ pour $x \geq 0$ et $F_X(x) = 0$ pour $x < 0$. Trouver la série génératrice des moments $M_X(t)$ de X .

- A) $\frac{1}{1-t}$ B) $\frac{1}{3-3t}$ C) $\frac{3-t}{3-3t}$ D) $\frac{2}{3t} + \frac{1}{3(1+t)}$ E) $\frac{3-2t}{3-3t}$

17 Soit X et Y des variables aléatoires de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E[X^2 + Y^2]$.

- A) $\frac{13}{15}$ B) $\frac{14}{15}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{11}{15}$ E) $\frac{2}{3}$

18 Les durées de vie future (en années) d'un homme et de son épouse sont des variables aléatoires continues, indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 50]$. Trouver la probabilité que l'épouse survivra d'au moins 5 ans à son mari.

- A) 0.35 B) 0.405 C) 0.435 D) 0.475 E) 0.49

19 Pour une police d'assurance le nombre de réclamations est $N = 0, 1$ ou 2 avec probabilités communes de $\frac{1}{3}$. On connaît, à propos de la somme des $0, 1$ ou 2 réclamations, l'information suivante : $E[S|N = 0] = 0$, $\text{Var}[S|N = 0] = 0$, $E[S|N = 1] = 10$, $\text{Var}[S|N = 1] = 5$, $E[S|N = 2] = 20$ et $\text{Var}[S|N = 2] = 8$. Trouver la variance de S .

- A) $\frac{13}{3}$ B) $\frac{13}{2}$ C) 13 D) $\frac{200}{3}$ E) 71

[20] Soit X et Y des variables aléatoires continues, indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Trouver $P(X^2 \geq 2Y)$.

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

[21] Dans une urne il y a des boules numérotées 1, 2, 3. On pige au hasard, sans remplacement, une première boule puis une seconde. Soit X le numéro sur la première boule et Y le numéro sur la seconde. Trouver $\rho_{X,Y}$, le coefficient de corrélation entre X et Y .

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

[22] Soit X une variable aléatoire dont la série génératrice des moments est $M_X(t) = e^{3t}(1 - t^2)^{-1}$. Trouver $\sigma_X/E[X]$.

- A) 0.125 B) 0.333 C) 0.471 D) 0.500 E) 0.667

[23] Soit X et Y deux variables aléatoires continues de fonction de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\text{Cov}(X, Y)$, la covariance de X et Y .

- A) $-\frac{1}{144}$ B) $-\frac{1}{12}$ C) 0 D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{144}$

24] Vous choisissez un nombre $X = x$ entre 0 et 1 selon la loi uniforme. Vous choisissez ensuite un second nombre Y entre x et 1 toujours selon une loi uniforme. Trouver $P(X + Y \leq 1)$.

- A) $\ln 2$ B) $1 - \ln 2$ C) e^{-1} D) $1/2$ E) $1/4$

25] Le nombre N de réclamations pour une compagnie d'assurance suit une loi de Poisson de paramètre λ . Le montant X de chaque réclamation suit une loi exponentielle également de paramètre λ . Soit T le montant total de toutes les réclamations. Trouver $\text{Var}[T]$.

- A) λ B) $\frac{1}{\lambda}$ C) $\frac{2}{\lambda}$ D) $\frac{1}{\lambda^2}$ E) $1 + \frac{1}{\lambda}$