

EXAMEN INTRA (2/4), ACT 2121

ARTHUR CHARPENTIER

Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont en revanche interdits.

Il y a 25 questions. Sur la feuille jointe, veuillez reporter vos réponses (une unique réponse par question)

- vous gagnez 1 points par bonne réponse
- vous gagnez 0 point par mauvaise réponse

Aucune justification n'est demandée.

Votre note finale est le total des points (sur 25).

Il y a 12 pages dans cet énoncé, merci de vérifier que le nombre de pages correspond, avant de débiter.

- 1] La fonction de densité X du montant d'une réclamation est :

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & \text{pour } x > 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Supposons qu'il y ait trois réclamations indépendantes. Trouver l'espérance de la plus grande des trois.

- A) 3.375 B) 2.232 C) 2.70 D) 2.025 E) 4.50

- 2] Le profit annuel d'une compagnie I est modélisé par une variable aléatoire continue $X > 0$ de fonction de densité $f_X(x)$. Le profit de la compagnie II est de 20% supérieur. Trouver la fonction de densité du profit Y de la compagnie II.

- A) $\frac{5}{6}f_X\left(\frac{5}{6}y\right)$ B) $\frac{6}{5}f_X\left(\frac{6}{5}y\right)$ C) $f_X\left(\frac{6}{5}y\right)$ D) $\frac{6}{5}f_X\left(\frac{5}{6}y\right)$ E) $f_X\left(\frac{5}{6}y\right)$

- 3] Soit X_1, X_2, X_3 trois observations indépendantes de la variable aléatoire continue X ayant la fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2} - x & \text{pour } 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la probabilité qu'exactement deux des trois observations soient supérieures à 1.

- A) $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$ B) $3 - 2\sqrt{2}$ C) $3(\sqrt{2} - 1) \cdot (2 - \sqrt{2})^2$
D) $\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$ E) $3\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$

- 4] Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de distribution est :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 1 - 9x^{-2} & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Soit $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_5)$, où X_1, X_2, \dots, X_5 sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que X . Trouver $E[Y]$.

- A) 6 B) 4 C) $\frac{20}{3}$ D) 5 E) $\frac{10}{3}$

- 5] Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = (2x)^{-1}$ pour $e^{-1} < x < e$. Si trois observations indépendantes de X sont faites, trouver la probabilité que l'une soit moins de 1 et que les deux autres soient plus de 1.

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

- 6] Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle. Si $P(X > 1) = P(X \leq 1)$ que vaut $E[X]$?

- A) $\frac{1}{e}$ B) $\ln 2$ C) $\frac{1}{\ln 2}$ D) e E) 1

- 7] La variable aléatoire X , montant d'une réclamation, se répartit selon la densité exponentielle. Trouver $\text{Var}[X]$ sachant que $P(X \leq 2) = 2P(X \geq 4)$.

- A) $\frac{2}{\ln 2}$ B) $\frac{8}{(\ln 2)^2}$ C) $\frac{(\ln 2)^2}{4}$ D) $\frac{2}{\ln \sqrt{2}}$ E) $\frac{4}{(\ln 2)^2}$

- 8] L'actuaire attend le premier des trois rapports faits simultanément par des inspecteurs indépendants avant de commencer son étude menant au remboursement des dommages d'un assuré. Si les temps (en semaines) pour faire leurs rapports suivent des lois exponentielles de moyenne 2, 3, 4 respectivement et le temps de l'étude de l'actuaire est aussi une exponentielle de moyenne 5, combien de temps (en semaines) y aura-t-il en moyenne avant le remboursement ?

A) 7 B) 8 C) $\frac{77}{13}$ D) $\frac{12}{13}$ E) 14

- 9] Soit X une variable aléatoire discrète de loi de Poisson. Sachant que $E[X] = \ln 2$, trouver $E[\cos(\pi X)]$.

A) 0 B) $2 \ln 2$ C) 1 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

- 10] Soit X et Y des variables aléatoires discrètes de distribution conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9} 2^{x-y+1} & \text{pour } x = 1, 2 \text{ et } y = 1, 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $E\left[\frac{X}{Y}\right]$.

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{25}{18}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{8}{9}$

- [11] Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = kx(1-x)$ où k est une constante et $0 < x < 1$. Trouver $\text{Var}[X]$.

A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

A) 3.466 B) 5.000 C) 6.931 D) 7.213 E) 14.429

- [12] Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$. Trouver $E[\max_{1 \leq i \leq n} X_i] - E[\min_{1 \leq i \leq n} X_i]$.

A) $\frac{1}{n+1}$ B) $1 - \frac{1}{n}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{n}{n+1}$ E) $\frac{n-1}{n+1}$

- [13] Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle avec moyenne 1. Trouver la valeur maximum de $P(x \leq X \leq 2x)$ pour $x \geq 0$.

A) 1 B) $\ln 2$ C) $\frac{1}{\ln 2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

- [14] Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois exponentielles de paramètres λ et μ respectivement.

Trouver $E[\max(X, Y)]$.

A) $\frac{1}{\lambda + \mu}$ B) $\frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{\lambda^2\mu + \lambda\mu^2}$ C) $\frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$ D) $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ E) $\max(\lambda, \mu)$

15] Le petit Nestor collectionne les cartes de joueurs de Baseball dans les paquets de gommes à m,cher. Il y a en tout 20 cartes différentes (réparties aléatoirement, une par paquet). Combien de paquets de gommes Nestor devrait-il s'attendre à avoir à acheter pour obtenir la collection complète ?

- A) 71.95 B) 98.41 C) 150 D) 224.67 E) 400

16] Si X est uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$, trouver $E[-\ln X]$.

- A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{e}$ D) 1 E) e

17] Soit X une variable aléatoire telle que $E[X] = 2$ et $E[X(X - 4)] = 5$. Trouver l'écart-type de $Y = -4X + 12$.

- A) $\sqrt{24}$ B) 12 C) 4 D) 24 E) 144

18] Pour une police d'assurance, la perte X a la distribution discrète suivante :

$$X = \begin{cases} 2 & \text{avec probabilité } 0.4 \\ 20 & \text{avec probabilité } 0.6 \end{cases}$$

Votre travail, comme actuaire, est de déterminer le déductible d à imposer pour que l'espérance du remboursement soit 6. Que vaut d ?

- A) 1 B) 5 C) 7 D) 10 E) 15

19 Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 8xe^{-4x^2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver la médiane de X .

- A) 0.347 B) 1 C) 0.693 D) 0.416 E) 0.833

20 Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité $f_X(x) = \frac{|x|}{4}$ pour $-2 \leq x \leq 2$. Trouver σ_X , l'écart-type de X .

- A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) 2 E) 1

21 Soit X une variable aléatoire continue (telle que $X > 0$) de fonction de densité $f_X(x)$ et fonction de distribution $F_X(x)$. Laquelle des expressions suivantes donne $E[X]$?

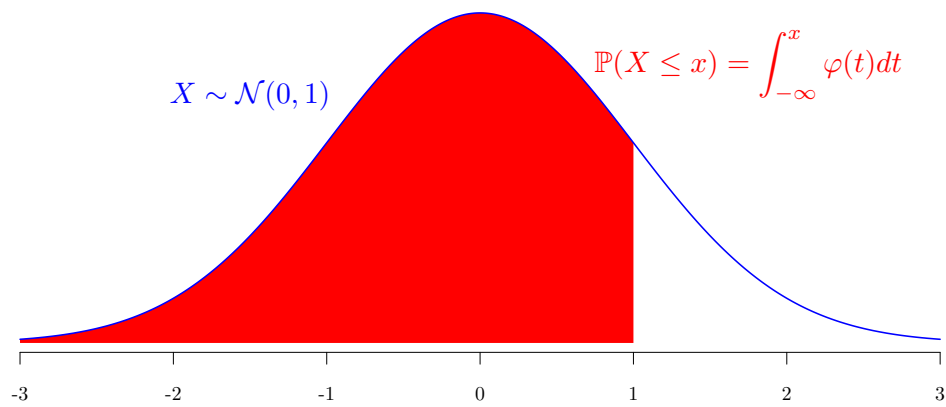
- A) $\int_0^{\infty} F_X(x) dx$ B) $\int_0^{\infty} (1 - f_X(x)) dx$ C) $\int_0^{\infty} x F_X(x) dx$
D) $\int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx$ E) $\int_0^{\infty} f_X(x) dx$

- 22 À l'hiver 2013, le cours ACT2121 est offert à deux groupes formés aléatoirement. Le groupe 20 (respectivement 21) comprend 70 (respectivement 60) inscrits. En supposant que la note d'un étudiant quelconque du ACT2121 suit toujours une loi normale de moyenne 72 et variance 25, trouver la probabilité que les moyennes des deux groupes diffèrent par 3 points ou plus.
- A) 0.9997 B) 0.6000 C) 0.0600 D) 0.0060 E) 0.0006
- 23 Les données de Statistique Canada révèlent que le revenu annuel brut des familles du Québec (respectivement de l'Ontario) suit une loi normale de moyenne 68 000\$ (respectivement 81 000\$) et d'écart-type 6 000\$ (respectivement 8 000\$). Cent familles sont choisies au hasard dans chacune des deux provinces. Trouver la probabilité que le revenu annuel moyen des cent familles de l'Ontario dépasse par au moins 15 000\$ celui des cent familles du Québec.
- A) 2.28% B) 15.87% C) 50% D) 84.13% E) 99.72%
- 24 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale avec $\mu_X = 3$, $\mu_Y = 5$, $\sigma_X = 3$ et $\sigma_Y = 4$.
- Trouver la probabilité que $Y - X$ soit plus grand que 7.
- A) 0.03 B) 0.16 C) 0.42 D) 0.84 E) 0.97

- 25 Dans un grand groupe de personnes on suppose que la grandeur des hommes (respectivement des femmes) suit une loi normale de moyenne 175 cm (respectivement 168 cm) et d'écart-type 8 cm (respectivement 6 cm). Pour la danse d'ouverture d'un bal, on choisit au hasard 5 hommes et 5 femmes et formons 5 couples. Trouver la probabilité que dans les cinq couples les femmes soient toujours plus petites que leur partenaire.
- A) 99% B) 75% C) 52% D) 9% E) 25%

Table de la loi normale La table suivante donne les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \text{ où } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) du$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990