

L'interaction: preuves/programmes/dialogues

Myriam Quatrini

1 février 2017

Sommaire

- 1 La Ludique, un *effet de bord* du paradigme preuves/programmes
 - La théorie de la démonstration en accéléré
 - Le paradigme preuves/programmes
 - La Ludique
- 2 Vers un théorie ludique des dialogues
 - La surface du dialogue
 - Bases cognitives
 - Outils pour l'étude de l'argumentation

Malgré l'échec du programme de Hilbert

- De nouveaux **outils** : le calcul des séquents, puis la déduction naturelle,
- Des **résultats** importants, parmi lesquels le Hauptsatz,
- De nouveaux **enjeux** : la logique comme modèle de calcul, le paradigme preuves/programmes.

Une transformation des objets

De simples textes (séquences de formules), les preuves sont devenues des **arbres**.

axiomes/hypothèses

$\Gamma_1 \vdash A_1$

...

axiomes/hypothèses

$\Gamma_n \vdash A_n$

$\Gamma \vdash \Delta$
conclusion

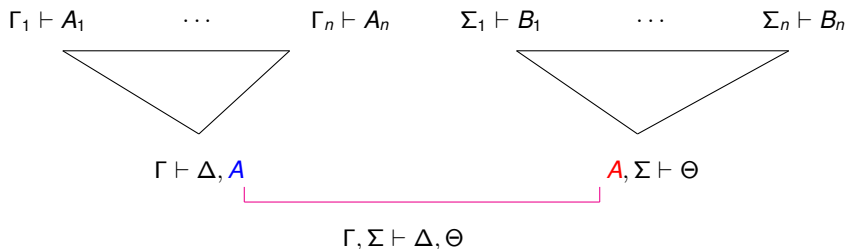
Les **noeuds** sont des **séquents** :

Les **liens** sont des **règles**

Une règle particulièrement importante

La règle de coupure

qui permet de **brancher** deux preuves entre elles quand une même formule apparaît dans l'une comme **hypothèse**, dans l'autre comme **conclusion**.



La logique modèle du calcul

Au coeur de la discipline un résultat fondateur:

Théorème (Hauptsatz, Gentzen, 1934)

Si π est une preuve de $\vdash \Gamma$ contenant des occurrences de la règle de coupures, alors, il existe une preuve λ de $\vdash \Gamma$ qui est sans coupure.

La procédure de réécriture de π vers λ modélise un calcul.
A condition que le système formel satisfasse de bonnes propriétés.

L'isomorphisme de Curry-Howard

Programmation	Spécifications	Programmes	Evaluation programme/ entrées	Exécution
λ -calcul	Types	λ -termes	Application (λxM) N	Normalisation $M[N/x]$
Logique	Formules	Preuves	Coupure	Elimination des coupures

Une parfaite correspondance

- Non seulement au niveau des **objets**.
- Mais préservant la **dynamique**.

L'isomorphisme de Curry-Howard

Programmation	Spécifications	Programmes	Evaluation programme/ entrées	Exécution
λ -calcul	Types	λ -termes	Application $(\lambda xM)N$	Normalisation $M[N/x]$
Logique	Formules	Preuves	Coupure	Elimination des coupures

Une parfaite correspondance

- Non seulement au niveau des **objets**.
- Mais préservant la **dynamique**.

La logique comme modèle de calcul.

Programmation	Spécifications	Programmes	Evaluation programme/ entrées	Exécution de calcul
λ -calcul	Types	λ -termes	Application $(\lambda xM)N$	Normalisation $M[N/x]$
Logique	Formules	Preuves	Coupure	Elimination des coupures

Et alors, l'objet central de la théorie de la démonstration s'est déplacé.

- Des *formules*
- Aux *preuves*
- Puis à l'*élimination des coupures* et aux propriétés qui en font, selon les systèmes, un "*bon*" modèle de calcul.

La logique comme modèle de calcul.

Programmation	Spécifications	Programmes	Evaluation programme/ entrées	Exécution de calcul
λ -calcul	Types	λ -termes	Application $(\lambda xM)N$	Normalisation $M[N/x]$
Logique	Formules	Preuves	Coupure	Elimination des coupures

Et alors, l'objet central de la théorie de la démonstration s'est déplacé.

- Des *formules*
- Aux *preuves*
- Puis à l'*élimination des coupures* et aux propriétés qui en font, selon les systèmes, un "*bon*" modèle de calcul.

La logique comme modèle de calcul.

Programmation	Spécifications	Programmes	Evaluation programme/ entrées	Exécution de calcul
λ -calcul	Types	λ -termes	Application $(\lambda xM)N$	Normalisation $M[N/x]$
Logique	Formules	Preuves	Coupure	Elimination des coupures

Et alors, l'objet central de la théorie de la démonstration s'est déplacé.

- Des *formules*
- Aux *preuves*
- Puis à l'*élimination des coupures* et aux propriétés qui en font, selon les systèmes, un "*bon*" modèle de calcul.

Une étape cruciale dans cette évolution : la Logique Linéaire (Girard 1985)

Nouvelle évolution des objets de la théorie de la démonstration

- Raffinement des formules propositionnelles ;
 - $A \Rightarrow B$ devient $!A \multimap B$,
 - $A \wedge B$ devient soit $A \otimes B$, soit $A \& B$,
- Une nouvelle expression des preuves sous forme de graphes : les réseaux de preuves.

Une étape cruciale dans cette évolution : la Logique Linéaire (Girard 1985)

- de nouveaux outils, de nouveaux concepts :
 - le contrôle des ressources,
 - le contrôle possible de la séquentialité : réseaux de preuves ou **calcul des séquents hyperséquentialisé**
 - via des nouvelles propriétés des formules : leur **polarité**.
- La formulation d'un programme (*GoI*) : l'objectif d'une **expression des preuves qui rende compte de la dynamique de l'élimination des coupures**.

Des formules polarisées

Selon la propriété de *réversibilité* du connecteur principal :

$$\frac{\vdash \Delta, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Delta, A \& B}$$

● $\vdash \Delta, A \& B$

On peut retrouver les prémisses. La règle est *réversible*.

La formule $A \& B$ est **négative** (et sa négation $A^\perp \oplus B^\perp$ est positive).

$$\frac{\vdash \Delta, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Delta, \Gamma, A \otimes B}$$

● $\vdash \Delta, \Gamma, A \otimes B$

On ne peut pas retrouver les prémisses. La règle est *irréversible*.

La formule $A \otimes B$ est **positive** (et sa négation $A^\perp \wp B^\perp$ est négative).

Des preuves focalisées

- Si on choisit le système formel suivant :
 - des séquents de formules **positives avec au plus une formule à gauche**
 - on compose/décompose **tous les connecteurs de même polarité en une seule étape**
- On obtient un calcul des séquents hyperséquentialisé, qui est **complet** pour la prouvabilité **quotiente** les preuves ayant le **même comportement lors de l'élimination des coupures**.

La Ludique (Girard 2001)

- *Une théorie logique* :
un résultat-étape dans le programme d'une expression de preuves
rendant compte de la dynamique
- *Obtenue via un renversement "ontologique"* :
Habituellement

Les formules → Les preuves → La coupure
et son élimination

En Ludique

Les comportements ← Les desseins ← L'interaction
et son processus

Vers une abstraction des preuves

On ne retient des preuves que ce qui est pertinent
pour l'élimination des coupures.

- Des preuves **hyperséquentialisée**. Une alternance de seulement deux règles :
 - une positive, lorsque la formule principale est à droite du séquent (on choisit et on déconstruit)
 - une négative, lorsque la formule principale est à gauche du séquent (on déconstruit)
- De la notion de formule, on ne retient que son **lieu** dans la preuve (son adresse).

A la place des preuves, les desseins comme support d'interaction

On ne retient des preuves

que ce qui est pertinent pour l'élimination des coupures.

$$\frac{\frac{\overline{\vdash A_1, A_2}}{A^\perp \vdash} \quad \frac{\overline{\vdash T} \quad \overline{\vdash 1}}{B^\perp \vdash}}{\vdash A \otimes (B \oplus C)} \quad \text{⊗}$$

$$\frac{\frac{\overline{\vdash \xi_{11}, \xi_{12}}}{\xi_1 \vdash} \quad \frac{\frac{\overline{\xi_{300} \vdash}}{\vdash \xi_{30}} \quad \overline{\vdash \xi_{37}}}{\xi_3 \vdash}}{\vdash \xi} \quad \text{⊗}$$

A la place des formules, des **adresses** : ξ, ξ_1, \dots
le lieu courant de l'interaction

A la place des preuves, les desseins comme support d'interaction

On ne retient des preuves

que ce qui est pertinent pour l'élimination des coupures.

$$\frac{\frac{\overline{\vdash A_1, A_2}}{A^\perp \vdash} \quad \frac{\overline{\vdash T} \quad \overline{\vdash \perp}}{B^\perp \vdash}}{\vdash A \otimes (B \oplus C)} \quad \text{⊗}$$

$$\frac{\frac{\overline{\vdash \xi 11, \xi 12}}{\xi 1 \vdash} \quad \frac{\frac{\overline{\xi 300 \vdash}}{\vdash \xi 30}}{\vdash \xi 37}}{\xi 3 \vdash}}{\vdash \xi} \quad \text{⊗}$$

A la place des règles, des **actions** : $(+, \xi, \{1, 3\})$, $(-, \xi 3, \{0\})$, ...
c-a-d la donnée : d'une polarité $+/-$, d'une adresse ξ , d'un nombre fini de sous-adresses $\{\xi 1, \xi 3\}$
une interaction passant par le lieu ξ continuera sur les lieux $\xi 1$ et $\xi 3$

A la place des preuves, les desseins comme support d'interaction

On ne retient des preuves

que ce qui est pertinent pour l'élimination des coupures.

$$\frac{\frac{\overline{\vdash A_1, A_2}}{A^\perp \vdash} \quad \frac{\overline{\vdash T} \quad \overline{\vdash 1}}{B^\perp \vdash}}{\vdash A \otimes (B \oplus C)} \quad \text{✘}$$

$$\frac{\frac{\overline{\vdash \xi 11, \xi 12}}{\xi 1 \vdash} \quad \frac{\frac{\overline{\xi 300 \vdash}}{\vdash \xi 30} \quad \overline{\vdash \xi 37}}{\xi 3 \vdash}}{\vdash \xi} \quad \text{✘}$$

Une action spéciale ✘ d'arrêt (abandon)

la seule possibilité pour terminer une interaction sans diverger.

Elimination des coupures = recherche de preuves

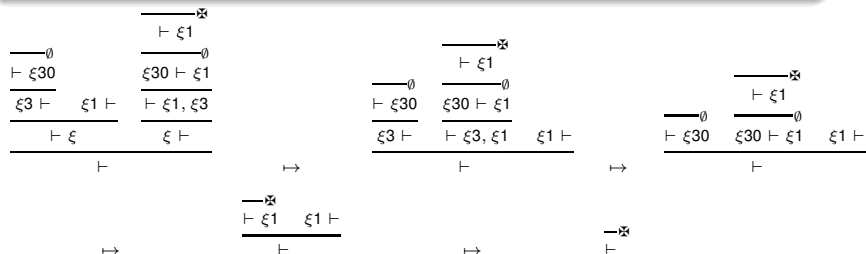
En donnant un statut aux “ preuves avortées”, une *même* *interaction* pour considérer l’élimination des coupures comme :

	Calcul	Recherche de preuve
Interaction	$\frac{\begin{array}{c} \pi_1 \quad \pi_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \vdash A \quad A \vdash B \end{array}}{\vdash B}$	$\frac{\begin{array}{c} \pi_1 \quad \pi_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \vdash A \quad A \vdash \end{array}}{\vdash}$
Résultat	$\begin{array}{c} \pi_3 \\ \vdots \\ \vdash B \end{array}$	$\begin{array}{c} ? \\ \vdash \end{array} \text{ ou } \begin{array}{c} \longrightarrow \otimes \\ \vdash \end{array}$

Deux modes d'interaction

Le cas clos :

un processus d'interaction entre une tentative de "défense" de ξ et une tentative d'"attaque" de ξ

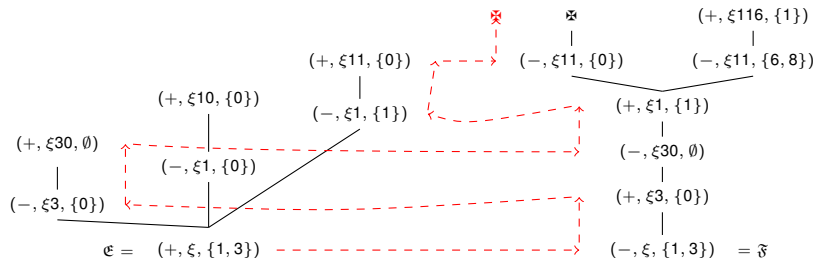


L'**interaction** est dite **convergente** lorsqu'elle aboutit au ⊗ . Les deux desseins sont alors **orthogonaux**.

Deux modes d'interaction

Le cas clos :

on s'intéresse au parcours qui se déplit entre deux séquences d'actions tant qu'elles sont duales l'une de l'autre.



Des outils et des concepts logiques nouveaux

- On retrouve les **formules** comme ensembles de desseins clos par bi-orthogonalité : **comportements**. : $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\perp\perp}$.
- Un **bon dessein** appartient à l'interprétation d'une formule ssi il est l'interprétation d'une **preuve**.
- On retrouve la notion de **formule valide** : une formule est vraie lorsque le comportement qui lui est associé **contient un bon dessein**.

→ *Possibilité de définir de nouveaux connecteurs.*

→ *Toutes les justifications d'une position ne sont pas des preuves.*

→ *La forme logique des énoncés peut être raffinée par de nouvelles justifications.*

Pourquoi la Ludique ?

THÉORIE DU CALCUL/ THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION

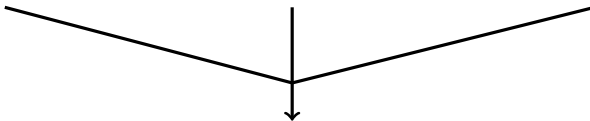
LOGIQUE

Pour l'**argumentation**,
la **sémantique formelle** :
énoncés \mapsto **propositions**,
on s'intéresse à
leur **valeur de vérité**,
aux **inférences logiques**,
à la **négation logique**.

Pour l'**analyse syn/sem**
les **réseaux de preuves**.
des **lambda-termes**
En **sémantique lexicale**
la **théorie des types**
En **grammaire formelle**
les **types dépendants** .

THÉORIE DES JEUX

Pour l'**étude de la signification**
et de l'**argumentation**,
les **stratégies** .



*La ludique comme
cadre unique*

Pourquoi la Ludique ?

- La Ludique est une **théorie de l'interaction** (selon deux modes) :
 - Le **mode clos** permet de retrouver les concepts de la **théorie des jeux**, les desseins sont des **stratégies**, les ensembles clos de desseins sont des **positions de joueurs**.
 - Le **mode ouvert** permet de retrouver la théorie du calcul, les desseins sont des **programmes**, les ensembles clos de desseins sont des **types**.
- La Ludique est une **théorie logique** :
Les desseins sont des **preuves**, les ensembles clos de preuves sont des **formules**.

La modélisation des dialogues en Ludique

Elle s'organise en deux volets (correspondant aux deux modes de l'interaction).

- **Surface des dialogues** Le dialogue est réduit à sa manifestation : le flux des interventions échangées par deux protagonistes (pôles) : l'un produit, l'autre reçoit.
Mode clos de l'interaction
- **Bases cognitives** Les objets qui permettent de décrire comment ces interventions sont construites, comment elles sont reçues, quelles traces elles laissent.
Mode ouvert de l'interaction

La surface du dialogue

- Un dialogue donne lieu à la **construction de deux desseins qui interagissent (mode clos)**
- Les interventions sont des **suites alternées** d'actes de dialogue
- A partir de la notion d'**acte de dialogue** :

(+/-, *adresse, ouvertures, expression*)

c'est une **action** de la Ludique plus une expression : le fait de langage par lequel l'acte se manifeste.

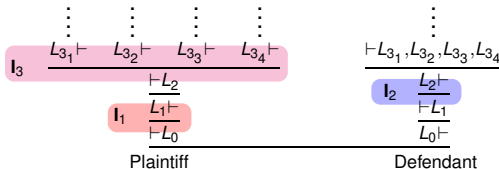
- Les actes de dialogue sont **positifs** pour le locuteur qui les produit et **négatifs** pour celui qui les reçoit

Un exemple

Celui développé par H. Prakken d'une controverse juridique entre *plaintiff* et *defendant*.

- l_1 *Plaintiff*: I claim that defendant owes me 500 euro.
- l_2 *Defendant*: I dispute plaintiff's claim.
- l_3 *Plaintiff* Defendant owes me 500 euro by r_1
since we conclude a valid sales contract.
I delivered but defendant did not pay.
- l_4 : *Defendant* I concede that plaintiff delivered and I did not pay,
but I dispute that we have valid contract.

Les trois premières interventions: $I_1 \dots I_3$



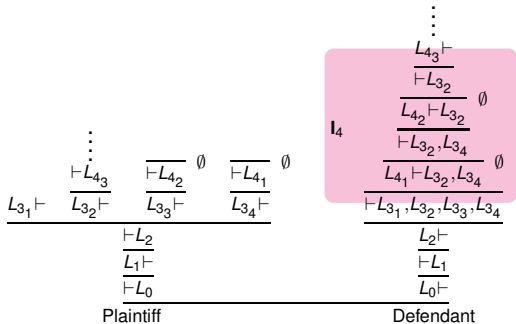
I_1 : I claim that defendant owes me 500 euro.

I_2 : I dispute plaintiff's claim.

I_3 : Defendant owes me 500 euro by r_1 since we conclude a valid sales contract, I delivered but defendant did not pay.

La dispute jusqu'à

l'intervention I_4 : I concede that plaintiff delivered and I did not pay, but I dispute that we have valid contract.



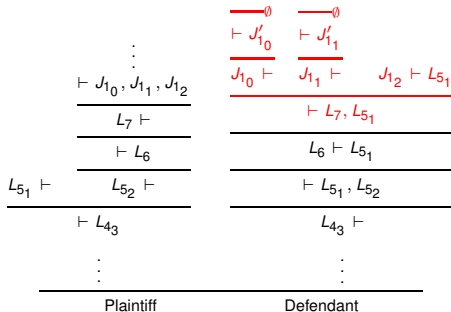
The first judge's intervention: J_1

J_1 : By r_3 the party who invokes a signature under a document which is not an affidavit has the burden to prove that it is authentic when this is disputed so plaintiff must prove this is defendant's signature.

- It occurs inside the dispute as an intervention of the defendant.
- It is a sequence of dialogue acts:
it starts with a positive one (arguing) opens three elements.
The two first elements are immediately closed: it is not possible to discuss neither a law (r_3) nor a fact (the document is not an affidavit).
- It gives the turn to plaintiff.

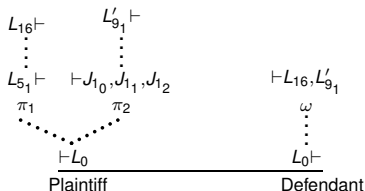
The first judge's intervention: J_1

J_1 : By r_3 the party who invokes a signature under a document which is not an affidavit has the burden to prove that it is authentic when this is disputed so plaintiff must prove this is defendant's signature.

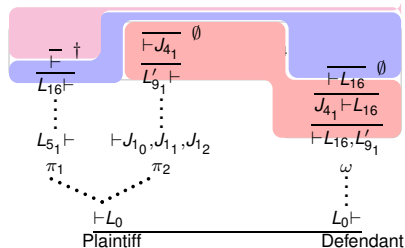


La sentence

Before



After



It is the defendant's turn. Two loci are available:

- L'_{9_1} (his signature is not valid)
- L_{16} (his illness)

I am convinced by plaintiff's evidence that defendant's signature under the contract is authentic. Yet I cannot grant plaintiff's claim since the fact that defendant looked normal during the negotiations is insufficient to conclude that defendant's insanity could not be known to plaintiff: he might have known if he had checked the court's register. Therefore I deny plaintiff his claim.

Applications (dès le volet “surface du dialogue”)

- Pour l'argumentation juridique
Les interventions du juge dans le processus de dialogue entre les **deux** protagonistes rendent compte :
 - de la distribution de la charge de la preuve et,
 - de la sentence.

- Pour les actes de langage
des séquences invariantes d'actes de dialogue selon les ancrages offerts ou interdits à l'interlocuteur.

Par exemple la concession

$(+, L_a, \{ok\}, prop_a)(-, L_{ok-a}, \emptyset, concede_a)$

Deuxième volet de la formalisation

- En plus de la surface du dialogue afin de *rendre compte du contenu des intervention et de leur rôle inférentiel*, on ajoute un second volet :
- Le contexte du dialogue: **une base cognitive pour chaque locuteur** (l'état de ses connaissances, ses engagements, ses inférences . . .)
qui est mis à jour après chaque intervention.

Une base cognitive pour chaque locuteur

- qui rend compte de l'état de ses connaissances, de ses engagements, de ses calculs inférentiels ...
via leur représentation **par des desseins**.
- En utilisant le **mode ouvert de l'interaction**, ces desseins :
 - sont déplacés vers la surface du dialogue,
 - interagissent pour effectuer le raisonnement inférentiel
 - sont effacés, ajoutés, permettant la mise à jour des bases cognitives après chaque intervention.

Zoom sur l'intervention I_3 du plaignant

Example

I_3 : Defendant owes me 500 euro by r1 since we conclude a valid sales contract, I delivered but defendant did not pay.

- Dans le dialogue:

$$\frac{\begin{array}{cccc} \mathcal{D}_{r_1} & \mathcal{D}_{val-contrat} & \mathcal{D}_{del} & \mathcal{D}_{not-pay} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{3_1} \vdash & L_{3_2} \vdash & L_{3_3} \vdash & L_{3_4} \vdash \end{array}}{\vdash L_2}$$

- Dans sa base, le plaignant possède des desseins \mathcal{D}_{r_1} , $\mathcal{D}_{val-contrat}$, \mathcal{D}_{del} et $\mathcal{D}_{not-pay}$, qu'il va pouvoir délocaliser pour poursuivre son argumentation.

Les desseins dans la base cogn. du Plaignant

- Ceux correspondant aux faits qu'il a avancés

$$\overline{\quad}^{\emptyset} \quad \mathcal{D}_{del} = \vdash L_{Del} \qquad \overline{\quad}^{\emptyset} \quad \mathcal{D}_{not.paid} = \vdash L_{notPay}$$

Les desseins \mathcal{D}_{del} et $\mathcal{D}_{not.paid}$ qui sont les justifications des énoncés “j’ai livré l’article” et “le client n’a pas payé”,

En tant que preuves, ils sont réduits à de simples axiomes,

Les desseins dans la base cogn. du Plaignant

- Le dessein $\mathcal{D}_{val-contra}$ qui explicite la validité du contrat : elle repose sur la validité d'une signature :

$$\mathcal{D}_{val-contra} = \frac{\frac{\frac{\overline{\emptyset}}{\vdash L_{sign}}}{L_{?sign} \vdash}}{\vdash L_{val-contra}}$$

Interaction dans la base du plaignant

$$\begin{array}{c}
 \hline \emptyset \\
 \hline \vdash L_{sign} \\
 \hline L_{?sign} \vdash \\
 \hline \vdash L_{val-contrat} \quad \hline \vdash L_{Del} \\
 \hline L_{?Cont} \vdash \quad \hline L_{?Det} \vdash \\
 \hline \vdash L_{Cont-and-Del}
 \end{array}$$

L'interaction entre

se réduit en

$$\begin{array}{c}
 \hline \emptyset \\
 \hline \vdash L_{Pay}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \hline \emptyset \\
 \hline \vdash L_{Pay} \\
 \hline \emptyset \\
 \hline L_{Del} \vdash, L_{Pay} \\
 \hline \vdash L_{?Del}, L_{Pay} \\
 \hline \emptyset \\
 \hline L_{sign} \vdash L_{?Del}, L_{Pay} \\
 \hline \vdash L_{?sign}, L_{?Del}, L_{Pay} \\
 \hline L_{val-contrat} \vdash L_{?Del}, L_{Pay} \\
 \hline \vdash L_{?Cont}, L_{?Del}, L_{Pay} \\
 \hline L_{Cont-and-Del} \vdash L_{Pay}
 \end{array}$$

et

Suite du traitement de l'exemple (simplifié)

- La contradiction va être levée car le juge va décider que la loi r_1 ne s'applique pas,
- Ou, plus précisément que r_1 est une loi plus exigeante que celle utilisée par le Plaignant. Elle exige que les signataires du contrat soit en bonne santé mentale pour que celui-ci soit valide
- Autrement dit la validité du contrat ne repose pas sur une seule condition (une seule sous-formule) mais deux : la validité de la signature et la bonne santé mentale des signataires.

Suite et fin du traitement (simplifié) de l'exemple

On peut rendre compte de la fin de la dispute juridique,

- le dessein $\mathcal{D}_{val-contract}$ qui dans la base cognitive du plaignant représentait la validité du contrat doit être raffiné en un dessein $\mathcal{D}'_{val-contract}$.
- Mais les prémisses de ce dessein, en particulier le sous-dessein “bonne santé mentale” n’est pas disponible.
- L’interaction qui selon le plaignant amenait à la conclusion “le client doit payer” n’est plus possible.

Résumé

Dans ce cadre formel **on peut retrouver différentes manifestations de la dimension logique du langage.**

- Via le mode clos:
 - la notion de *proposition* comme phrase qui a la propriété d'être vraie ou fausse ;
 - une sémantique à la BHK des énoncés comme ensembles de leurs justifications
- Via le mode ouvert ;
 - la notion de *modus ponens* ou inférence logique,
 - la mise à jour des données (dimension algorithmique de la logique).

Résumé

En séparant surface du dialogue et contexte, **on peut séparer différents niveaux : logique, argumentatif, rhétorique.**

- Les énoncés occurrent à la surface du dialogue via des **lieux**. Leur déploiement comme **proposition**, c'est à dire l'exploration de leur justification n'est **pas nécessairement identique** dans les deux bases cognitives.
- Les **inférences** s'effectuent dans les bases cognitives. Elles s'imposent à tous une fois que les desseins **supports de l'interaction** sont partagés.
- On peut déplier une **controverse** et observer quelles branches sont **fermées ou bien encore ouvertes**, et rendre compte finement de la **nature des divergences**.

Commentaire

L'**interaction**, abstraction de la coupure et son élimination subsume, dans le modèle ludique des dialogues :

- **la dualité** : donnée/argument, production/réception, une proposition et sa négation
via le mode clos
- **le déroulement d'un processus** : exécution d'un programme, calcul, inférence.
via le mode ouvert

Merci de votre attention !